

6 Differentiaalrekening

Voorkennis Afgeleide en raaklijn

Bladzijde 52

- 1 a $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ geeft $f'(x) = 2x^3 - 6x + 6$
- b $g(x) = (5x^2 - 2)^2 = 25x^4 - 20x^2 + 4$ geeft $g'(x) = 100x^3 - 40x$
- c $h(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$ geeft $h'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 1 - (x-3) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2+6x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+6x+4}{(x^2+4)^2}$
- d $k(p) = -\frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{5}p^2 - 8$ geeft $k'(p) = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{5}p$
- e $l(q) = 10 - 5q^2 + 9q^3 - a^4$ geeft $l'(q) = -10q + 27q^2$
- f $m(x) = 2x^2 - \frac{6}{x+1}$ geeft $m'(x) = 4x - \frac{(x+1) \cdot 0 - 6 \cdot 1}{(x+1)^2} = 4x + \frac{6}{(x+1)^2}$

Bladzijde 53

- 2 a $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(0) = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ f(0) = 2, \text{ dus } A(0, 2) \end{array} \right\} b = 2$$

 Dus $k: y = -4x + 2$.
- b $f'(x) = 1$ geeft $3x^2 - 2x - 4 = 1$
 $3x^2 - 2x - 5 = 0$
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -5 = 64$
 $x = \frac{2 \pm 8}{6} = 1\frac{2}{3} \vee x = \frac{2-8}{6} = -1$
 $f(-1) = 4$ en $f(1\frac{2}{3}) = -2\frac{22}{27}$, dus $B(-1, 4)$ en $C(1\frac{2}{3}, -2\frac{22}{27})$.

- 3 a $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x+1) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$
 Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ f(2) = 1, \text{ dus } A(2, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot 2 + b = 1 \\ \frac{2}{3} + b = 1 \\ b = \frac{1}{3} \end{array}$$

- Dus $k: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.
- b $f'(x) = \frac{3}{4}$ geeft $\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{4}$
 $(x+1)^2 = 4$
 $x+1 = 2 \vee x+1 = -2$
 $x = 1 \vee x = -3$
 $f(-3) = 3\frac{1}{2}$ en $f(1) = \frac{1}{2}$, dus $B(-3, 3\frac{1}{2})$ en $C(1, \frac{1}{2})$.

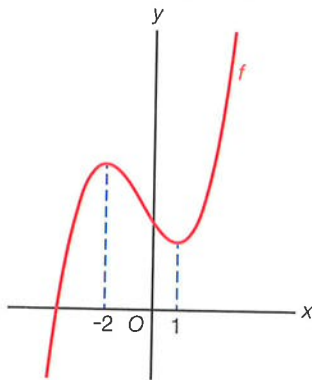
6.1 Toppen en buigpunten

Bladzijde 54

- 1 In toppen is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 0.
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 18x + 50$ geeft $f'(x) = x^2 - 3x - 18$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 - 3x - 18 = 0$
 $(x+3)(x-6) = 0$
 $x = -3 \vee x = 6$
 Dus $x_A = -3$ en $x_B = 6$.

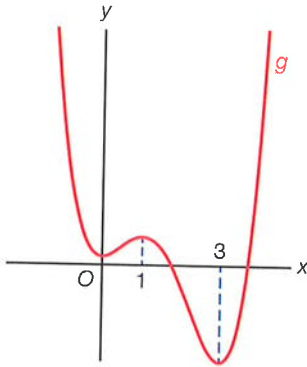
Bladzijde 55

- 2 a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ geeft $f'(x) = x^2 + x - 2$
 $f'(x) = 0$ geeft $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x-1)(x+2) = 0$
 $x = 1 \vee x = -2$



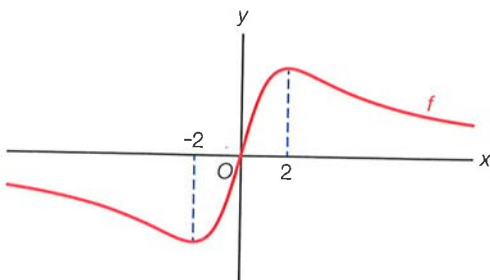
max. is $f(-2) = 8\frac{1}{3}$ en min. is $f(1) = 3\frac{5}{6}$.

- b** $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 2$ geeft $g'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$
 $g'(x) = 0$ geeft $12x^3 - 48x^2 + 36x = 0$
 $12x(x^2 - 4x + 3) = 0$
 $12x(x-1)(x-3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3$



min. is $g(0) = 2$, max. is $g(1) = 7$ en min. is $g(3) = -25$.
 Het bereik is $B_g = [-25, \rightarrow)$.

- 3 a** $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot 5 - 5x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{5x^2 + 20 - 10x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $\frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2} = 0$
 $-5x^2 + 20 = 0$
 $-5x^2 = -20$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$



min. is $f(-2) = -1\frac{1}{4}$ en max. is $f(2) = 1\frac{1}{4}$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } 5x = 0$$

$$x = 0$$

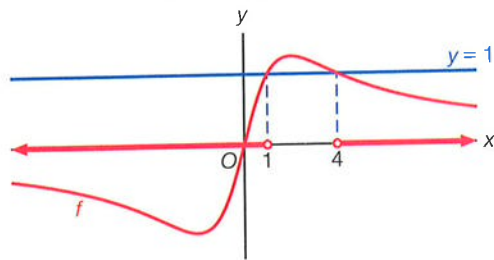
De grafiek snijdt de x -as alleen in $(0, 0)$, dus $B_f = [-1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}]$.

- b** Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(6) = \frac{-5 \cdot 6^2 + 20}{(6^2 + 4)^2} = -\frac{1}{10}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{10}x + b \\ f(6) = \frac{3}{4}, \text{ dus } A(6, \frac{3}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{10} \cdot 6 + b = \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{5} + b = \frac{3}{4} \\ b = 1\frac{7}{20} \end{array}$$

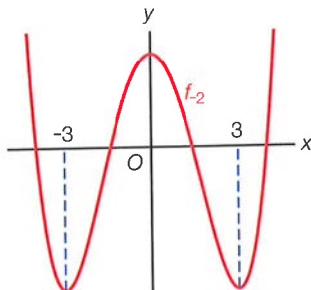
Dus $k: y = -\frac{1}{10}x + 1\frac{7}{20}$.

- c** $f(x) = 1$ geeft $\frac{5x}{x^2 + 4} = 1$
 $5x = x^2 + 4$
 $x^2 - 5x + 4 = 0$
 $(x - 1)(x - 4) = 0$
 $x = 1 \vee x = 4$



$f(x) < 1$ geeft $x < 1 \vee x > 4$

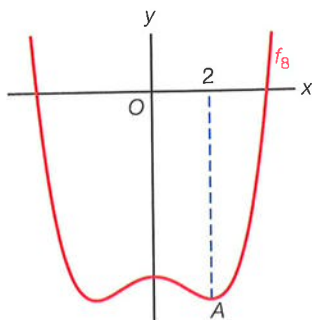
- 4 a** $f_{-2}(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 16) = x^4 - 18x^2 + 32$ geeft $f_{-2}'(x) = 4x^3 - 36x$
 $f_{-2}'(x) = 0$ geeft $4x^3 - 36x = 0$
 $4x(x^2 - 9) = 0$
 $4x = 0 \vee x^2 - 9 = 0$
 $x = 0 \vee x^2 = 9$
 $x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$



min. is $f_{-2}(-3) = -49$, max. is $f_{-2}(0) = 32$ en min. is $f_{-2}(3) = -49$.

$B_f = [-49, \rightarrow)$

- b** $f_p(x) = (x^2 + p)(x^2 - 16) = x^4 - 16x^2 + px^2 - 16p$ geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 32x + 2px$
 $f_p'(2) = 0$ geeft $32 - 64 + 4p = 0$
 $4p = 32$
 $p = 8$



Dus voor $p = 8$.

5 $f_p(x) = (x^2 + p)(x^2 - 16) = x^4 - 16x^2 + px^2 - 16p$ geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 32x + 2px$

$$\text{Voor } x = x_B \text{ geldt } \begin{cases} 4x^3 - 32x + 2px = 0 \\ p = 14x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 32x + 2 \cdot 14x \cdot x = 0 \\ 4x^3 + 28x^2 - 32x = 0 \\ 4x(x^2 + 7x - 8) = 0 \\ 4x(x-1)(x+8) = 0 \\ x = 0 \vee x = 1 \vee x = -8 \end{cases}$$

$x = 0$ geeft $p = 0$

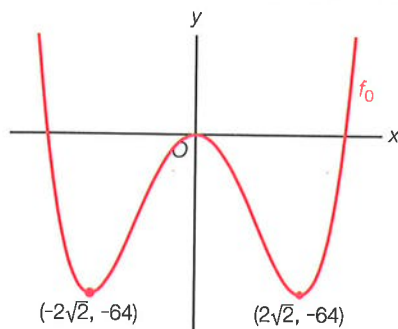
$$f_0(x) = x^4 - 16x^2 \text{ geeft } f_0'(x) = 4x^3 - 32x$$

$$f_0'(x) = 0 \text{ geeft } 4x^3 - 32x = 0$$

$$4x(x^2 - 8) = 0$$

$$4x = 0 \vee x^2 = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$$



$$B_{f_0} = [-64, \rightarrow)$$

$x = 1$ geeft $p = 14$

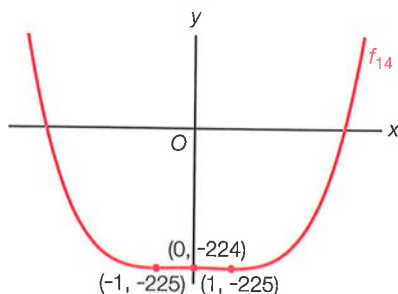
$$f_{14}(x) = x^4 - 16x^2 + 14x^2 - 16 \cdot 14 = x^4 - 2x^2 - 224 \text{ geeft } f_{14}'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f_{14}'(x) = 0 \text{ geeft } 4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$4x = 0 \vee x^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$$



$$B_{f_{14}} = [-225, \rightarrow)$$

$x = -8$ geeft $p = -112$

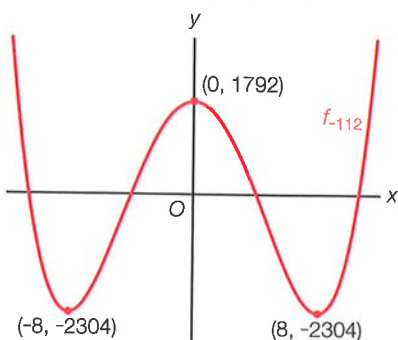
$$f_{-112}(x) = x^4 - 16x^2 - 112x^2 - 16 \cdot (-112) = x^4 - 128x^2 + 1792 \text{ geeft } f_{-112}'(x) = 4x^3 - 256x$$

$$f_{-112}'(x) = 0 \text{ geeft } 4x^3 - 256x = 0$$

$$4x(x^2 - 64) = 0$$

$$4x = 0 \vee x^2 = 64$$

$$x = 0 \vee x = 8 \vee x = -8$$



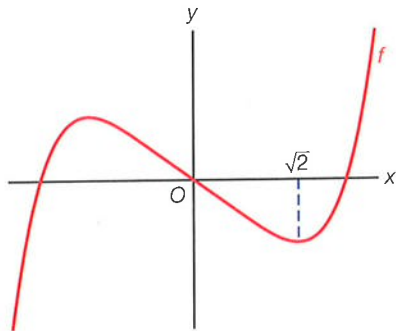
$$B_{f_{-112}} = [-2304, \rightarrow)$$

- 6 a** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = x^3 - 2x - 4$
b $f'(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$
c In de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$. Dus f heeft een extreme waarde voor $x = 2$.

Bladzijde 57

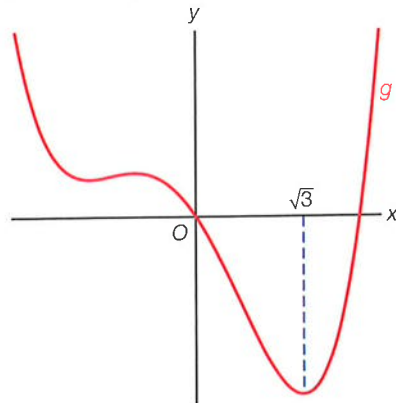
- 7 a** $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$
 $f'(1) = 4 - 18 + 24 - 10 = 0$
 Uit de schets blijkt dat er geen extreme waarde is voor $x = 1$. Er is wel een horizontale raaklijn.
b $f(1) = 1 - 6 + 12 - 10 + 7 = 4$ en $f(2\frac{1}{2}) = 2\frac{5}{16}$.
 Dus de horizontale raaklijnen zijn $y = 4$ en $y = 2\frac{5}{16}$.

- 8 a** $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - 7x$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^4 - 1\frac{1}{2}x^2 - 7$
 $f'(\sqrt{2}) = 2\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^4 - 1\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 - 7 = 2\frac{1}{2} \cdot 4 - 1\frac{1}{2} \cdot 2 - 7 = 10 - 3 - 7 = 0$



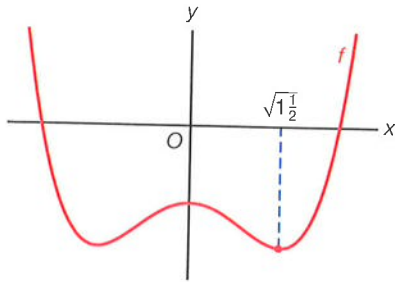
$f'(\sqrt{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2}$.
 Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

- b** $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - 3x$ geeft $g'(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$
 $g'(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} + 3 - 3\sqrt{3} - 3 = 0$



$g'(\sqrt{3}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{3}$.
 Dus g heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{3}$.

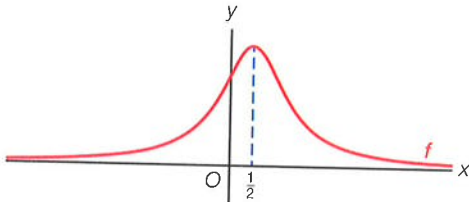
- 9 a** $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ geeft $f'(x) = 4x^3 - 6x$
 $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = 4 - 6 = -2$
 $f'(1)$ is niet gelijk aan 0, dus f heeft geen extreme waarde voor $x = 1$.
- b** $f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 4 \cdot (\sqrt{1\frac{1}{2}})^3 - 6 \cdot \sqrt{1\frac{1}{2}} = 4 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 6\sqrt{1\frac{1}{2}} - 6\sqrt{1\frac{1}{2}} = 0$



$f'(\sqrt{1\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{1\frac{1}{2}}$.

10 a $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^3+1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x^3+1-3x^3-3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-2x^3-3x^2+1}{(x^3+1)^2}$
 $f'(\frac{1}{2}) = \frac{-2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 1}{((\frac{1}{2})^3 + 1)^2} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 1}{(\frac{1}{8} + 1)^2} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1}{(\frac{9}{8})^2} = \frac{0}{\frac{81}{64}} = 0$



$f'(\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \frac{1}{2}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \frac{1}{2}$.

b $(x+1)(x^2-x+1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

c $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x^2-x+1}$ mits $x \neq -1$ geeft

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+1) \cdot 0 - 1 \cdot (2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2} = 0$$

$$-2x+1 = 0$$

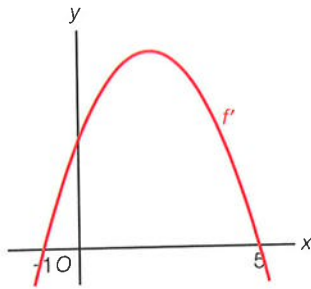
$$-2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

vold.

- 11 a** dalend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$
 stijgend op $\langle -1, 5 \rangle$
 toenemend stijgend op $\langle -1, 2 \rangle$
 afnemend stijgend op $\langle 2, 5 \rangle$

b $f'(x) = -3x^2 + 12x + 15$
 $f'(x) = 0$ geeft $-3x^2 + 12x + 15 = 0$
 $x^2 - 4x - 5 = 0$
 $(x+1)(x-5) = 0$
 $x = -1 \vee x = 5$



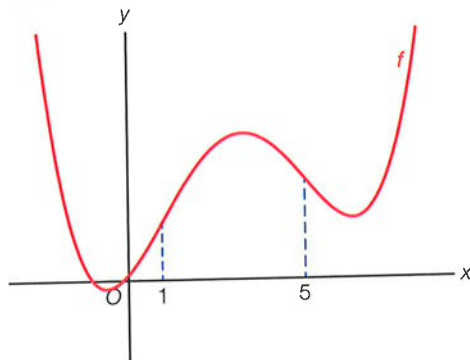
c $x_p = \frac{-1+5}{2} = 2$

- d Bij $x = x_p$ gaat de grafiek over van toenemend stijgend in afnemend stijgend, want links van $x = x_p$ nemen de hellingen toe en rechts van $x = x_p$ nemen de hellingen af.

Bladzijde 59

12 a $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 48x + 5$
 $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 48$
 $f''(x) = 12x^2 - 72x + 60$
 $f''(x) = 0$ geeft $12x^2 - 72x + 60 = 0$
 $x^2 - 6x + 5 = 0$
 $(x-1)(x-5) = 0$
 $x = 1 \vee x = 5$

$f(1) = 72$ en $f(5) = 120$.



Uit de schets volgt dat de buigpunten $(1, 72)$ en $(5, 120)$ zijn.

b $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x + 4$
 $g'(x) = x^2 - 6x + 6$
 $g''(x) = 2x - 6$
 $g''(x) = 0$ geeft $2x - 6 = 0$
 $2x = 6$
 $x = 3$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = g'(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ g(3) = 4, \text{ dus buigpunt } (3, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 4 \\ -9 + b = 4 \\ b = 13 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x + 13$.

13 a $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2$$

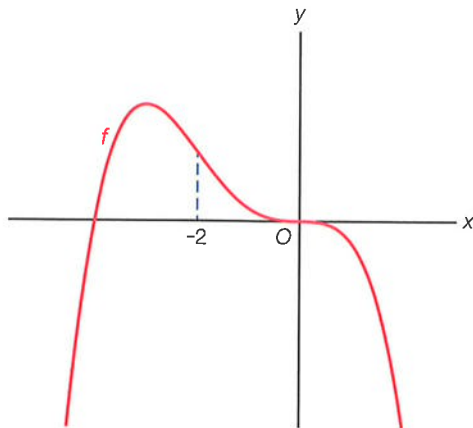
$$f''(x) = -x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } -x^2 - 2x = 0$$

$$-x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2$$

$$f(0) = 0 \text{ en } f(-2) = 1\frac{1}{3}$$



Uit de schets volgt dat $(-2, 1\frac{1}{3})$ en $(0, 0)$ de buigpunten zijn.

- b** $f''(0) = 0$ en $f'(0) = 0$, dus in het punt $(0, 0)$ is er sprake van een horizontale buigraaklijn.

14 a $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5$

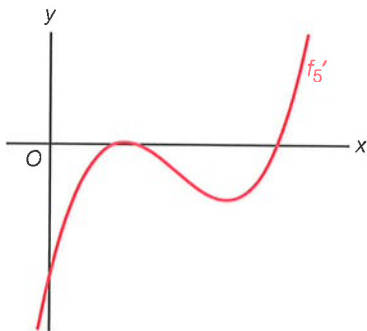
$$f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5$$

$$f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10$$

$$f_5''(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 12x + 10 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 24 > 0, \text{ dus twee oplossingen}$$

Dus f_5' heeft twee extremen.



De grafiek van f_5 heeft twee buigpunten, omdat f_5' twee extremen heeft.

b $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5$

$$f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

$$f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

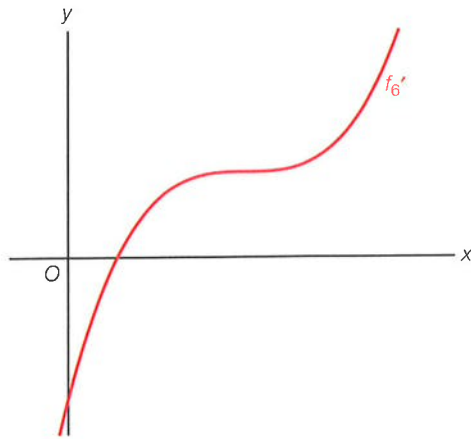
$$f_6''(x) = 0 \text{ geeft } 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$3(x-2)^2 = 0$$

De vergelijking $f_6''(x) = 0$ heeft één oplossing.

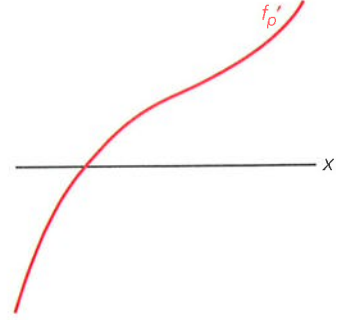
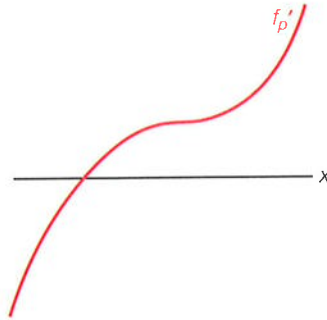
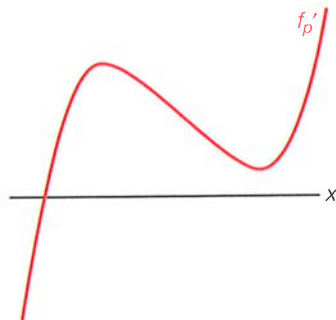
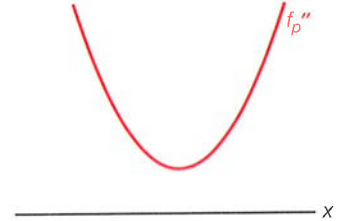
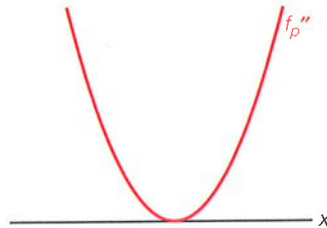
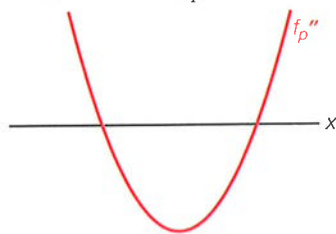
De grafiek van f_6' heeft dus één horizontale raaklijn.



De grafiek van f_6 heeft geen buigpunten omdat f_6' geen extremen heeft.

- c $f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + px^2 - 5x - 5$
 $f_p'(x) = x^3 - 6x^2 + 2px - 5$
 $f_p''(x) = 3x^2 - 12x + 2p$
 $f_p''(x) = 0$ mag geen of één oplossing hebben, oftewel $D \leq 0$.
 $(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2p \leq 0$
 $144 - 24p \leq 0$
 $-24p \leq -144$
 $p \geq 6$

- d $f_p''(x) = 3x^2 - 12x + 2p$
 De grafiek van f_p'' is een dalparabool met twee, één of nul snijpunten met de x -as.



Heeft de grafiek van f_p'' twee snijpunten met de x -as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-dalend-stijgend, dus f_p' heeft twee extremen, dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten.

Heeft de grafiek van f_p'' één raakpunt met de x -as, dan is de grafiek van f_p' stijgend-stijgend, dus f_p' heeft geen extremen, dus de grafiek van f_p heeft geen buigpunten.

Heeft de grafiek van f_p'' geen snijpunten met de x -as, dan is de grafiek van f_p' stijgend, dus f_p' heeft geen extremen, dus de grafiek van f_p heeft geen buigpunten.

Dus de grafiek van f_p heeft óf twee óf geen buigpunten.

Bladzijde 60

15 a $f(x) = (\frac{1}{2}x^3 - 4)^2 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 16 - 5 = \frac{1}{4}x^6 - 4x^3 + 11$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^5 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{1}{2}x^5 - 12x^2 = 0$$

$$3x^5 - 24x^2 = 0$$

$$3x^2(x^3 - 8) = 0$$

$$3x^2 = 0 \vee x^3 = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

In de figuur in het leerboek is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 2$.

$$f(2) = -5, \text{ dus top } (2, -5).$$

b $f'(x) = \frac{1}{2}x^5 - 12x^2$ geeft $f''(x) = \frac{5}{2}x^4 - 24x$

$f''(0) = 0$, in de figuur in het leerboek is te zien dat A een buigpunt is.

c $f''(x) = 0$ geeft $\frac{5}{2}x^4 - 24x = 0$

$$x(\frac{5}{2}x^3 - 24) = 0$$

$$x = 0 \vee \frac{5}{2}x^3 = 24$$

$$x = 0 \vee x^3 = 3\frac{1}{5}$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt[3]{3\frac{1}{5}}$$

$$f(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}) = (\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} - 4)^2 - 5 = \frac{19}{25}$$

$$\text{Dus } B(\sqrt[3]{3\frac{1}{5}}, \frac{19}{25}).$$

16 $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10$

$$f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + \frac{1}{2}x$$

$$f_p''(x) = 12x^2 + 6px + \frac{1}{2}$$

De grafiek van f_p heeft twee buigpunten als f_p' twee extremen heeft, dus als $f_p''(x) = 0$ twee oplossingen heeft.

$$\left. \begin{array}{l} \text{twee oplossingen, dus } D > 0 \\ D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 36p^2 - 72 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 36p^2 - 72 > 0 \\ 36p^2 > 72 \\ p^2 > 2 \end{array}$$

$$p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}.$$

Dus de grafiek van f_p heeft twee buigpunten voor $p < -\sqrt{2} \vee p > \sqrt{2}$.

17 a $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geeft $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Gegeven is dat f een derdegraadsfunctie is, dus $a \neq 0$.

Hieruit volgt dat de grafiek van f' een parabool is, dus f' heeft één extreem.

Dus de grafiek van elke derdegraadsfunctie heeft één buigpunt.

b Omdat de grafiek van f twee toppen heeft, heeft de grafiek van f' twee snijpunten met de x -as.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

twee oplossingen, dus $D > 0$

$$\left. \begin{array}{l} D = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4b^2 - 12ac > 0 \\ 4b^2 > 12ac \\ b^2 > 3ac \end{array}$$

c $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ geeft $f''(x) = 6ax + 2b$

$$f''(x) = 0 \text{ geeft } 6ax + 2b = 0$$

$$6ax = -2b$$

$$x = -\frac{b}{3a}$$

$$\text{Dus } x_R = -\frac{b}{3a}.$$

Voor een derdegraadsfunctie geldt dat $a \neq 0$, dus er is precies één buigpunt.

De x -coördinaten van de toppen zijn de oplossingen van $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 12ac$$

$$x = \frac{-2b + \sqrt{D}}{6a} \vee x = \frac{-2b - \sqrt{D}}{6a}$$

$$x_P + x_Q = \frac{-2b + \sqrt{D}}{6a} + \frac{-2b - \sqrt{D}}{6a} = \frac{-2b + \sqrt{D} - 2b - \sqrt{D}}{6a} = \frac{-4b}{6a} = \frac{-2b}{3a} = 2 \cdot \frac{-b}{3a} = 2x_R$$

$$\text{Dus } 2x_R = x_P + x_Q \text{ oftewel } x_R = \frac{x_P + x_Q}{2}.$$

6.2 De afgeleide van machtsfuncties

Bladzijde 62

18 a $\frac{4}{x^2} = 4x^{-2}$ $\frac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ $\frac{5}{x^4} = 5x^{-4}$ $\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x^{-2}$

b $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ $3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$ $-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $\frac{1}{7}x^{-6} = \frac{1}{7x^6}$

c $\frac{x^3 + 5x^2}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} = x^2 + 5x$
 $\frac{4x^2 + 7x}{x^3} = \frac{4x^2}{x^3} + \frac{7x}{x^3} = 4x^{-1} + 7x^{-2}$
 $\frac{2x^5 + 5x^2}{3x^4} = \frac{2x^5}{3x^4} + \frac{5x^2}{3x^4} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}x^{-2}$

d $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x}{2x^2} + \frac{4}{2x^2} = \frac{x+4}{2x^2}$
 $\frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^3}{2x^2} + \frac{6}{2x^2} = \frac{x^3+6}{2x^2}$
 $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4x} = \frac{2x^2}{3} - \frac{3}{4x} = \frac{8x^3}{12x} - \frac{9}{12x} = \frac{8x^3-9}{12x}$

19 a $f(x) = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = \frac{x^2 \cdot [1]' - 1 \cdot [x^2]'}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

b $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$

c $g(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ geeft $g'(x) = \frac{x^5 \cdot [1]' - 1 \cdot [x^5]'}{(x^5)^2} = \frac{x^5 \cdot 0 - 1 \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{-5x^4}{x^{10}} = -5x^{-6}$

Bladzijde 63

- 20 a $n = 0$ geeft $f(x) = x^0 = 1$ en hieruit volgt $f'(x) = 0$.
 $n = 0$ geeft $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1} = 0$
Dus $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ klopt voor $n = 0$.
 $n = 1$ geeft $f(x) = x^1 = x$ en hieruit volgt $f'(x) = 1$.
 $n = 1$ geeft $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$
Dus $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ klopt voor $n = 1$.
- b Dat lukte omdat de noemers uit slechts één term bestaan.
De functies g en h zijn te differentiëren door uit te delen.

21 a $f(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$ geeft $f'(x) = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$

b $g(x) = 5 - \frac{3}{x^2} = 5 - 3x^{-2}$ geeft $g'(x) = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}$

c $h(x) = ax^4 - \frac{b}{x^4} = ax^4 - bx^{-4}$ geeft $h'(x) = 4ax^3 + 4bx^{-5} = 4ax^3 + \frac{4b}{x^5}$

22 a $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2x}{3x^2} - \frac{1}{3x^2} = \frac{2}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-2}$ geeft $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} = -\frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3} = -\frac{2x}{3x^3} + \frac{2}{3x^3} = \frac{2-2x}{3x^3}$

b $g(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$ geeft $g'(x) = \frac{(2x-1) \cdot 6x - 3x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{12x^2 - 6x - 6x^2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2}$

c $h(x) = \frac{3x^6-3}{x^3} = \frac{3x^6}{x^3} - \frac{3}{x^3} = 3x^3 - 3x^{-3}$ geeft $h'(x) = 9x^2 + 9x^{-4} = 9x^2 + \frac{9}{x^4} = \frac{9x^6}{x^4} + \frac{9}{x^4} = \frac{9x^6+9}{x^4}$

23 a $f(x) = 5x^2 - \frac{5}{x^2} = 5x^2 - 5x^{-2}$ geeft $f'(x) = 10x + 10x^{-3} = 10x + \frac{10}{x^3}$

b $g(x) = \frac{5}{2x^2} - \frac{2x^2}{5} = \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{2}{5}x^2$ geeft $g'(x) = -5x^{-3} - \frac{4}{5}x = -\frac{5}{x^3} - \frac{4x}{5}$

c $h(x) = 6 - \frac{x^2-1}{x} = 6 - \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}\right) = 6 - x + x^{-1}$ geeft $h'(x) = -1 - x^{-2} = -1 - \frac{1}{x^2}$

Bladzijde 64

24 a $f(x) = 0$ geeft $\frac{3x+3}{x} = 0$
 $3x+3=0$
 $3x=-3$
 $x=-1$

Dus $A(-1, 0)$.

$f(x) = \frac{3x+3}{x} = \frac{3x}{x} + \frac{3}{x} = 3 + 3x^{-1}$ geeft $f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-1) = -\frac{3}{(-1)^2} = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } A(-1, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3 \cdot -1 + b = 0 \\ 3 + b = 0 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus $k: y = -3x - 3$.

b $\text{rc}_{\text{raaklijn}} = -\frac{3}{4}$, dus $f'(x) = -\frac{3}{4}$
 $-\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4}$
 $x^2 = 4$

$x = 2 \vee x = -2$

$f(2) = 4\frac{1}{2}$ en $f(-2) = 1\frac{1}{2}$, dus de raakpunten zijn $(2, 4\frac{1}{2})$ en $(-2, 1\frac{1}{2})$.

25 a $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2-1) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(2) = \frac{-4-1}{(4-1)^2} = -\frac{5}{9}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{5}{9}x + b \\ f(2) = \frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, \frac{2}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{5}{9} \cdot 2 + b = \frac{2}{3} \\ -1\frac{1}{9} + b = \frac{2}{3} \\ b = 1\frac{7}{9} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{5}{9}x + 1\frac{7}{9}$.

$$\text{b } g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - x^{-1} \text{ geeft } g'(x) = 1 + x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$\text{Stel } l: y = ax + b \text{ met } a = g'(2) = \frac{4 + 1}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1\frac{1}{4}x + b \\ g(2) = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } B(2, 1\frac{1}{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{4} \cdot 2 + b = 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} + b = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

$$b = -1$$

$$\text{Dus } l: y = 1\frac{1}{4}x - 1.$$

$$\text{c } g'(x) = 1 + x^{-2} \text{ geeft } g''(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$g''(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-2}{x^3} = 0 \text{ en deze vergelijking heeft geen oplossingen.}$$

g' heeft geen extreme waarden, dus de grafiek van g heeft geen buigpunten.

$$\text{26 a } f(x) = \frac{x^2 + 4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} = x + 4x^{-1} \text{ geeft } f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Zie de figuur in het leerboek.

max. is $f(-2) = -4$ en min. is $f(2) = 4$.

$$\text{b } r_{\text{raaklijn}} = -3 \text{ geeft } f'(x) = -3$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2} = -3$$

$$x^2 - 4 = -3x^2$$

$$4x^2 = 4$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$f(1) = 5$ en $f(-1) = -5$, dus de raakpunten zijn $(1, 5)$ en $(-1, -5)$.

$$\text{c } f'(x) = 2 \text{ geeft } \frac{x^2 - 4}{x^2} = 2$$

$$x^2 - 4 = 2x^2$$

$$x^2 = -4$$

geen opl.

Dus er is geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 2.

$$\text{d } f'(x) = \frac{5}{9} \text{ geeft } \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{5}{9}$$

$$9x^2 - 36 = 5x^2$$

$$4x^2 = 36$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \vee x = -3$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{5}{9}x + b \\ f(3) = 4\frac{1}{3}, \text{ dus door } (3, 4\frac{1}{3}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{5}{9} \cdot 3 + b = 4\frac{1}{3} \\ 1\frac{2}{3} + b = 4\frac{1}{3} \end{array}$$

$$b = 2\frac{2}{3}$$

Dus de lijn $k: y = \frac{5}{9}x + 2\frac{2}{3}$ raakt de grafiek van f .

27 $f_a(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{a}{x^2} = \frac{1}{a} \cdot x^2 + a \cdot x^{-2}$ geeft $f'_a(x) = \frac{1}{a} \cdot 2x + a \cdot -2x^{-3} = \frac{2x}{a} - \frac{2a}{x^3}$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \text{ geeft } \frac{2x}{a} &= \frac{2a}{x^3} \\ 2x^4 &= 2a^2 \\ x^4 &= a^2 \\ x^2 &= a \vee x^2 = -a \\ \text{vold.} \quad \text{vold. niet} \end{aligned}$$

$y_{\text{toppen}} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} = 1 + 1 = 2$ en dus liggen de toppen op de lijn $y = 2$.

28 a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

b $x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}}$

c $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $x^3 \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

29 a $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

c $-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

d $1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

Bladzijde 65

30 a $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

$$[x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}]' = [x]'$$

$$[x^{\frac{1}{2}}]' \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$$

$$2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$$

b $2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = 1$

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot [x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}$$

$$[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$[x^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Bladzijde 66

31 a $f(x) = x + \sqrt{x} = x + x^{\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1\frac{1}{3}}$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

c $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $h'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $k(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3} = x^3 \cdot x^{\frac{3}{5}} = x^{3\frac{3}{5}}$ geeft $k'(x) = 3\frac{3}{5}x^{2\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 3\frac{3}{5}x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

32 a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{2\frac{1}{4}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot x^{\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{4}x \cdot \sqrt[4]{x}$

b $g(x) = \frac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x^2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 4x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ geeft

$$g'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{4x^2 - 3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

c $h(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x}) = x^2 + x^2 \cdot \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} = x^2 + x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}} = x^2 + x^{2\frac{1}{2}} + 1 + x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2x + 2\frac{1}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2x + 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d $k(x) = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}}$ geeft

$$k'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2x + 4}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$$

33 a $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ geeft $f'(x) = -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

c $h(x) = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 + 6}{2x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

d $k(x) = x^2(x\sqrt{x} - 3) = x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^2 = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^2 = x^{3\frac{1}{2}} - 3x^2$ geeft

$$k'(x) = 3\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} - 6x$$

34 a $f(x) = (x\sqrt{x} - 3)^2 = x^3 - 6x\sqrt{x} + 9 = x^3 - 6x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 9 = x^3 - 6x^{\frac{3}{2}} + 9$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 9x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 - 9\sqrt{x}$

b $g(x) = \frac{2x-3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{2x}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{5}{2}}} = 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{5}{2}}$ geeft

$$g'(x) = -3x^{-\frac{3}{2}} + 7\frac{1}{2}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + \frac{15}{2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}} = \frac{-6x + 15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$$

c $h(x) = (x - \sqrt[3]{x})^2 = (x - x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} + (x^{\frac{1}{3}})^2 = x^2 - 2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ geeft

$$h'(x) = 2x - 2\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x - 2\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x - 2\frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

d $k(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ geeft

$$k'(x) = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{\frac{7}{4}x^2 - 1}{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{7x^2 - 4}{4x \cdot \sqrt[4]{x}}$$

35 $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{2}{3}}$ geeft $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{8}) = \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}, \text{ dus } A(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{1}{8} + b = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + b = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = 4x + \frac{1}{4}$.

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(8) = \frac{2}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{2} = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} y = x + b \\ f(8) = 12, \text{ dus } B(8, 12) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 + b = 12 \\ b = 4 \end{array}$$

Dus $l: y = x + 4$.

Snijden van k en l geeft $4x + \frac{1}{4} = x + 4$

$$3x = 3\frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1\frac{1}{4} \\ y = x + 4 \end{array} \right\} y = 1\frac{1}{4} + 4 = 5\frac{1}{4}$$

Dus $C(1\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$.

36 a $f(x) = x\sqrt{x} - 3x = x^{\frac{3}{2}} - 3x$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 3$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$$

$$\sqrt{x} = 6$$

$$x = 36$$

$$f(36) = 36\sqrt{36} - 3 \cdot 36 = -4$$

min. is $f(36) = -4$.

b Stel $k: y = ax$ met $a = f'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{0} - 3 = -3$.

Dus $k: y = -3x$.

c $rc_l = 3$, dus $f'(x) = 3$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 3$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x} = 12$$

$$x = 144$$

$l: y = 3x + b$

$$\left. \begin{array}{l} f(144) = 144, \text{ dus } A(144, 144) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 144 + b = 144 \\ 432 + b = 144 \\ b = -288 \end{array}$$

Dus $A(144, 144)$ en $l: y = 3x - 288$.

Bladzijde 67

37 a $f(x) = \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ geeft

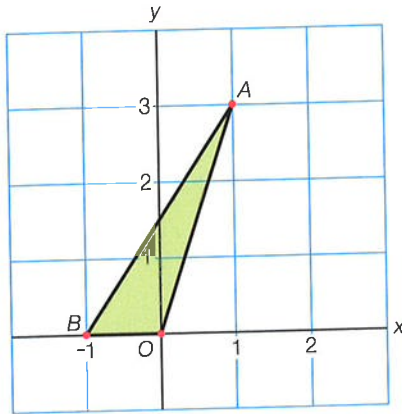
$$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = \frac{2\frac{1}{2} \cdot 1^3 - 1}{1\sqrt{1}} = 1\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 y &= 1\frac{1}{2}x + b \\
 f(1) &= 3, \text{ dus } A(1, 3) \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= 1\frac{1}{2}x + b \\ f(1) &= 3 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} 1\frac{1}{2} \cdot 1 + b &= 3 \\ 1\frac{1}{2} + b &= 3 \\ b &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

Snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$
 $1\frac{1}{2}x = -1\frac{1}{2}$
 $x = -1$, dus $B(-1, 0)$



$$O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$$

b $f'(x) = 0$ geeft $\frac{2\frac{1}{2}x^3 - 1}{x\sqrt{x}} = 0$
 $2\frac{1}{2}x^3 - 1 = 0$
 $2\frac{1}{2}x^3 = 1$
 $x^3 = \frac{2}{5}$
 $x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

Dus $p = \frac{2}{5}$.

38 a $s(t) = 10t\sqrt{t} = 10t^{1\frac{1}{2}}$ geeft $s'(t) = 15t^{\frac{1}{2}} = 15\sqrt{t}$
 $s'(8) = 15\sqrt{8} = 15 \cdot 2\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

Dus de snelheid na 8 seconden is $30\sqrt{2}$ m/s.

b $108 \text{ km/uur} = \frac{108}{3,6} = 30 \text{ m/s}$
 $s'(t) = 30$ geeft $15\sqrt{t} = 30$
 $\sqrt{t} = 2$
 $t = 4$

Dus na 4 seconden is de snelheid 108 km/uur.

c $s(9) = 10 \cdot 9\sqrt{9} = 270$ en $s'(9) = 15 \cdot \sqrt{9} = 45$
Dus in de eerste 9 seconden legt de trein 270 meter af en in de volgende 51 seconden
 $51 \cdot 45 = 2295$ meter.
Dus in de eerste minuut legt de trein $270 + 2295 = 2565$ meter af.

39 $f_p(x) = (2x - p\sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4px\sqrt{x} + p^2x = 4x^2 - 4px^{1\frac{1}{2}} + p^2x$ geeft

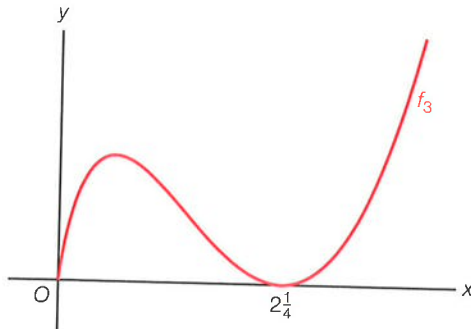
$$f_p'(x) = 8x - 6px^{\frac{1}{2}} + p^2 = 8x - 6p\sqrt{x} + p^2$$

$$f_p'(2\frac{1}{4}) = 0 \text{ geeft } 18 - 6p \cdot 1\frac{1}{2} + p^2 = 0$$

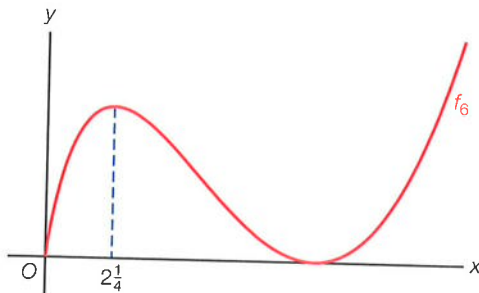
$$p^2 - 9p + 18 = 0$$

$$(p-3)(p-6) = 0$$

$$p = 3 \vee p = 6$$



$p = 3$ geeft min. is $f_3(2\frac{1}{4}) = 0$. Dus $p = 3$ voldoet niet.



$p = 6$ geeft max. is $f_6(2\frac{1}{4}) = 20\frac{1}{4}$.

6.3 De kettingregel

Bladzijde 69

40 a $v(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = 9 - 15 = -6$

$$u(v(3)) = u(-6) = (-6)^4 = 1296$$

b $v(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4$

$$u(v(4)) = u(-4) = (-4)^4 = 256$$

41 a $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = v^6$ en $v(x) = 3 - x^5$.

b $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \sqrt{v}$ en $v(x) = x^2 + 1$.

c $f(x) = u(v(x))$ met $u(v) = \frac{2}{v^3}$ en $v(x) = x + 8$.

Bladzijde 71

42 a $f(x) = (4x + 3)^3$ geeft $f'(x) = 3(4x + 3)^2 \cdot 4 = 12(4x + 3)^2$

b $g(x) = 6(\frac{1}{2}x - 4)^5$ geeft $g'(x) = 30(\frac{1}{2}x - 4)^4 \cdot \frac{1}{2} = 15(\frac{1}{2}x - 4)^4$

c $h(x) = 3x^2 - (\frac{1}{4}x - 2)^3$ geeft $h'(x) = 6x - 3(\frac{1}{4}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{4} = 6x - \frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 2)^2$

d $j(x) = (4x^2 - 3)^4$ geeft $j'(x) = 4(4x^2 - 3)^3 \cdot 8x = 32x(4x^2 - 3)^3$

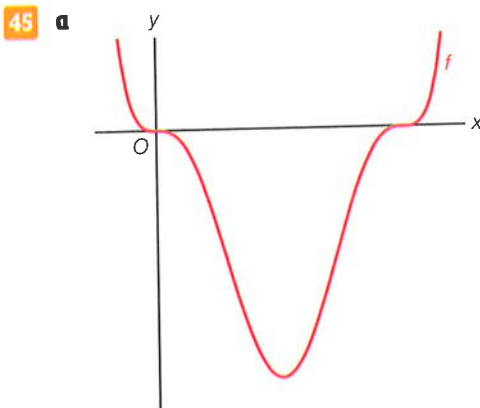
e $k(x) = 5x - \frac{4}{(3x+2)^3}$ geeft

$$k'(x) = 5 + 12(3x+2)^{-4} \cdot 3 = 5 + 36(3x+2)^{-4} = 5 + \frac{36}{(3x+2)^4}$$

f $l(x) = \sqrt{4x+1}$ geeft $l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$

43 a $f(x) = -2(2x+1)^4$ geeft $f'(x) = -8(2x+1)^3 \cdot 2 = -16(2x+1)^3$
 b $g(x) = \frac{1}{(3x-2)^2} = (3x-2)^{-2}$ geeft $g'(x) = -2(3x-2)^{-3} \cdot 3 = \frac{-6}{(3x-2)^3}$
 c $h(x) = \sqrt{2x^2+4x}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+4x}} \cdot (4x+4) = \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x}}$
 d $j(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} = (4x-1)^{-\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = -\frac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{-2}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$
 e $k(x) = (x^2+3)\sqrt{x^2+3} = (x^2+3)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $k'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+3}$
 f $l(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = (x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}$ geeft
 $l'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+2) = \frac{-x-1}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+3}}$

44 a $f(x) = 4(x^3+7x-2)^2$ geeft $f'(x) = 8(x^3+7x-2) \cdot (3x^2+7) = 8(3x^2+7)(x^3+7x-2)$
 b $g(x) = -\frac{6}{(x^2+3x)^3} = -6(x^2+3x)^{-3}$ geeft $g'(x) = 18(x^2+3x)^{-4} \cdot (2x+3) = \frac{18(2x+3)}{(x^2+3x)^4}$
 c $h(x) = \sqrt[3]{x^3+3x} = (x^3+3x)^{\frac{1}{3}}$ geeft $h'(x) = \frac{1}{3}(x^3+3x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2+3) = \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x)^2}}$
 d $j(x) = \frac{1}{(4-x)\sqrt{4-x}} = (4-x)^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $j'(x) = -1\frac{1}{2}(4-x)^{-2\frac{1}{2}} \cdot -1 = \frac{3}{2(4-x)^2 \cdot \sqrt{4-x}}$
 e $k(x) = 5\sqrt{2x^4+x^2} + 4x^2$ geeft $k'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^4+x^2}} \cdot (8x^3+2x) + 8x = \frac{5(4x^3+x)}{\sqrt{2x^4+x^2}} + 8x$
 f $l(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4}$ geeft $l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$



b Raaklijn horizontaal dus $f'(x) = 0$.
 $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2x)^3$ geeft $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x-2)$
 $f'(x) = 0$ geeft $3(\frac{1}{2}x^2 - 2x)^2 \cdot (x-2) = 0$
 $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \vee x-2 = 0$
 $x^2 - 4x = 0 \vee x = 2$
 $x(x-4) = 0 \vee x = 2$
 $x = 0 \vee x = 4 \vee x = 2$
c Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(3) = 3(\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3)^2 \cdot (3-2) = 6\frac{3}{4}$
 $y = 6\frac{3}{4}x + b$
 $f(3) = -3\frac{3}{8}$, dus $A(3, -3\frac{3}{8})$ } $6\frac{3}{4} \cdot 3 + b = -3\frac{3}{8}$
 $20\frac{1}{4} + b = -3\frac{3}{8}$
 $b = -23\frac{5}{8}$
 Dus $k: y = 6\frac{3}{4}x - 23\frac{5}{8}$ en $y_B = -23\frac{5}{8}$.

46 a $f(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2$ geeft $f'(x) = 4(\frac{1}{4}x - 1)^3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1$

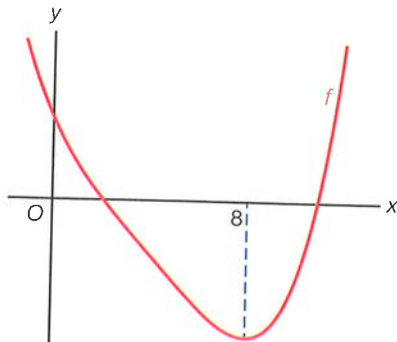
$$f'(x) = 0 \text{ geeft } (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = 0$$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = 1$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = 1$$

$$\frac{1}{4}x = 2$$

$$x = 8$$



min. is $f(8) = -5$ en $B_f = [-5, \infty)$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = rc_l = -2$.

$$f'(x) = -2 \text{ geeft } (\frac{1}{4}x - 1)^3 - 1 = -2$$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^3 = -1$$

$$\frac{1}{4}x - 1 = -1$$

$$\frac{1}{4}x = 0$$

$$x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + b \\ f(0) = 3, \text{ dus door } (0, 3) \end{array} \right\} b = 3$$

Dus $k: y = -2x + 3$.

47 a $g(x) = (\frac{1}{4}x - 1)^2 + ax + b = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + ax + b = \frac{1}{16}x^2 + (a - \frac{1}{2})x + b + 1$

Ook geldt $g(x) = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 15$.

Dus $a - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ oftewel $a = -1$ en $b + 1 = 15$ oftewel $b = 14$.

b $f(x) = g(x)$ geeft $(\frac{1}{4}x - 1)^4 - x + 2 = (\frac{1}{4}x - 1)^2 - x + 14$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^4 - (\frac{1}{4}x - 1)^2 - 12 = 0$$

Stel $(\frac{1}{4}x - 1)^2 = u$.

$$u^2 - u - 12 = 0$$

$$(u + 3)(u - 4) = 0$$

$$u = -3 \vee u = 4$$

$$(\frac{1}{4}x - 1)^2 = -3 \vee (\frac{1}{4}x - 1)^2 = 4$$

geen oplossing $\frac{1}{4}x - 1 = 2 \vee \frac{1}{4}x - 1 = -2$

$$\frac{1}{4}x = 3 \vee \frac{1}{4}x = -1$$

$$x = 12 \vee x = -4$$

Bladzijde 72

48 a $f(3) = \frac{1}{4}(2 \cdot 3 - 5)^3 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 1^3 + 2 = 2\frac{1}{4}$

$$g(3) = -\frac{1}{4}(3 \cdot 3 - 10)^4 + 2\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot 1 + 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$$

$f(3) = g(3)$, dus A ligt zowel op de grafiek van f als op die van g .

- b** $f(x) = \frac{1}{4}(2x-5)^3 + 2$ geeft $f'(x) = \frac{3}{4}(2x-5)^2 \cdot 2 = \frac{3}{2}(2x-5)^2$
 $f'(3) = \frac{3}{2}(2 \cdot 3 - 5)^2 = \frac{3}{2}$
 $g(x) = -\frac{1}{4}(3x-10)^4 + 2\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = -(3x-10)^3 \cdot 3 = -3(3x-10)^3$
 $g'(3) = -3(3 \cdot 3 - 10)^3 = 3$
 $f'(3) \neq g'(3)$, dus de raaklijnen in A hebben niet dezelfde richting.
 Emma heeft dus geen gelijk.

- c** $rc_{\text{raaklijn}} = 13\frac{1}{2}$, dus $f'(x) = 13\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2}(2x-5)^2 = 13\frac{1}{2}$
 $(2x-5)^2 = 9$
 $2x-5 = 3 \vee 2x-5 = -3$
 $2x = 8 \vee 2x = 2$
 $x = 4 \vee x = 1$

$$f(4) = 8\frac{3}{4} \text{ en } f(1) = -4\frac{3}{4}$$

Dus de punten zijn $(4, 8\frac{3}{4})$ en $(1, -4\frac{3}{4})$.

49 a $f(x) = \sqrt{x^2+9} - x^2 + 5x$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x - 2x + 5 = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 2x + 5$

$$f'(\sqrt{7}) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7+9}} - 2 \cdot \sqrt{7} + 5 = \frac{1}{4}\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 5 = 5 - 1\frac{3}{4}\sqrt{7} \neq 0$$

Dus f heeft geen extreme waarde voor $x = \sqrt{7}$.

- b** Stel $k: y = ax + b$ met $a = rc_k = rc_l = 5$.

$$f'(x) = 5 \text{ geeft } \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 2x + 5 = 5$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 2x$$

kwadrateren geeft

$$\frac{x^2}{x^2+9} = 4x^2$$

$$4x^2(x^2+9) = x^2$$

$$4x^4 + 36x^2 = x^2$$

$$4x^4 + 35x^2 = 0$$

$$x^2(4x^2 + 35) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee 4x^2 = -35$$

$$x = 0 \quad \text{geen opl.}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 5x + b \\ f(0) = 3, \text{ dus door } (0, 3) \end{array} \right\} b = 3$$

Dus $k: y = 5x + 3$.

- c** $f(0) = 3$, dus $A(0, 3)$.

Stel $m: y = ax + b$ met $a = f'(4) = \frac{4}{\sqrt{4^2+9}} - 8 + 5 = \frac{4}{\sqrt{25}} - 3 = \frac{4}{5} - 3 = -2\frac{1}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -2\frac{1}{5}x + b \\ f(4) = 9, \text{ dus } B(4, 9) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2\frac{1}{5} \cdot 4 + b = 9 \\ -8\frac{4}{5} + b = 9 \\ b = 17\frac{4}{5} \end{array}$$

Dus $m: y = -2\frac{1}{5}x + 17\frac{4}{5}$ en $C(0, 17\frac{4}{5})$.

$$AC = 17\frac{4}{5} - 3 = 14\frac{4}{5}$$

50 a $f(x) = \frac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} = 5x^{2\frac{1}{2}} + 10x^{-\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 12\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{1}{2}} = 12\frac{1}{2}x\sqrt{x} - \frac{5}{x\sqrt{x}} = \frac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ geeft $\frac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}} = 0$

$$12\frac{1}{2}x^3 - 5 = 0$$

$$12\frac{1}{2}x^3 = 5$$

$$x^3 = \frac{5}{12\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

$$f(\sqrt[3]{\frac{2}{5}}) = \frac{5 \cdot \frac{2}{5} + 10}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}} = \frac{12}{((\frac{2}{5})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{(\frac{2}{5})^{\frac{1}{6}}} = \frac{12}{\sqrt[6]{\frac{2}{5}}}$$

Dus $a = 12$, $b = 6$ en $c = \frac{2}{5}$.

b k raakt de grafiek van $g(x) = \frac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} + d$.

$$g(x) = \frac{5x^3 + 10}{\sqrt{x}} + d \text{ geeft } g'(x) = \frac{12\frac{1}{2}x^3 - 5}{x\sqrt{x}}$$

Stel $k: y = ax + b$ met $a = g'(1) = \frac{12\frac{1}{2} - 5}{1} = 7\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 7\frac{1}{2}x + b \\ g(1) = 15 + d, \text{ dus } A(1, 15 + d) \end{array} \right\} 7\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 15 + d$$

$$b = 7\frac{1}{2} + d$$

k door de oorsprong, dus $7\frac{1}{2} + d = 0$

$$d = -7\frac{1}{2}$$

Bladzijde 73

51 a De tijd nodig van A naar B via C is $\frac{2}{80} + \frac{10}{100} = \frac{1}{8}$ uur = 450 seconden.

De afstand AB is $\sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104}$ km.

De tijd nodig van A direct naar B is $\frac{\sqrt{104}}{80}$ uur = 458,9... seconden.

Het verschil is $458,9... - 450 \approx 9$ seconden.

b $t = \frac{AD}{80} + \frac{BD}{100} = \frac{\sqrt{x^2 + 2^2}}{80} + \frac{10 - x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + \frac{10}{100} - \frac{x}{100} = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x$

Dus $t = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x$.

c $t(x) = \frac{1}{80}\sqrt{x^2 + 4} + 0,1 - 0,01x$ geeft $t'(x) = \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} \cdot 2x - 0,01 = \frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0,01$

$t'(x) = 0$ geeft $\frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} - 0,01 = 0$

$$\frac{x}{80\sqrt{x^2 + 4}} = 0,01$$

$$x = 0,8\sqrt{x^2 + 4}$$

kwadrateren geeft

$$x^2 = 0,64(x^2 + 4)$$

$$x^2 = 0,64x^2 + 2,56$$

$$0,36x^2 = 2,56$$

$$x^2 = \frac{64}{9}$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$t(2\frac{2}{3}) = \frac{1}{80}\sqrt{(2\frac{2}{3})^2 + 4} + 0,1 - 0,01 \cdot 2\frac{2}{3} = 0,115 \text{ uur} = 414 \text{ seconden}$$

De snelste route is $450 - 414 = 36$ seconden sneller dan via C naar B .

52 $f(x) = (ax - 2)^4 + \frac{1}{2}ax$ geeft $f'(x) = 4(ax - 2)^3 \cdot a + \frac{1}{2}a = 4a(ax - 2)^3 + \frac{1}{2}a$

Een extreme waarde voor $x = 3$, dus $f'(3) = 0$.

Dit geeft $4a(a \cdot 3 - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$

$$4a(3a - 2)^3 + \frac{1}{2}a = 0$$

$$a(4(3a - 2)^3 + \frac{1}{2}) = 0$$

$$a = 0 \vee 4(3a - 2)^3 + \frac{1}{2} = 0$$

$$a = 0 \vee 4(3a - 2)^3 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee (3a - 2)^3 = -\frac{1}{8}$$

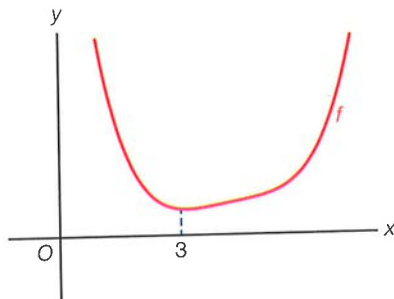
$$a = 0 \vee 3a - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee 3a = \frac{1}{2}$$

$$a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$$

$a = 0$ geeft $f(x) = (-2)^4 + 0 = 16$ en deze functie heeft geen extreme waarde voor $x = 3$.

$a = \frac{1}{2}$ geeft $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^4 + \frac{1}{4}x$



f heeft een extreme waarde voor $x = 3$ als $a = \frac{1}{2}$.

53 $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ is het product van de factoren x en $\sqrt{2x+1}$.
Dus volgens de productregel is $f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$.
De afgeleide van $\sqrt{2x+1}$ bereken je met de kettingregel.

Bladzijde 74

54 a $f(x) = x\sqrt{2x+1}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

b $g(x) = \frac{x+6}{\sqrt{8x+9}}$ geeft

$$g'(x) = \frac{\sqrt{8x+9} \cdot 1 - (x+6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{8x+9}} \cdot 8}{(\sqrt{8x+9})^2} = \frac{\sqrt{8x+9} - \frac{4(x+6)}{\sqrt{8x+9}}}{8x+9} = \frac{\frac{\sqrt{8x+9}^2 - 4(x+6)}{\sqrt{8x+9}}}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} = \frac{8x+9-4x-24}{(8x+9)\sqrt{8x+9}} = \frac{4x-15}{(8x+9)\sqrt{8x+9}}$$

55 a $f(x) = x\sqrt{3x+4}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3x+4} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \cdot 3 = \sqrt{3x+4} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{2(3x+4)}{2\sqrt{3x+4}} + \frac{3x}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$= \frac{6x+8+3x}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}$$

b $g(x) = x(3x+1)^3$ geeft

$$g'(x) = 1 \cdot (3x+1)^3 + x \cdot 3(3x+1)^2 \cdot 3 = (3x+1)^3 + 9x(3x+1)^2 \\ = (3x+1)^2(3x+1+9x) = (3x+1)^2(12x+1)$$

c $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$ geeft

$$h'(x) = \frac{(2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - \sqrt{x^2+1} \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{(2x+1) \cdot x}{\sqrt{x^2+1}} - 2\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ = \frac{(2x+1) \cdot x - 2(x^2+1)}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+x-2x^2-2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{x-2}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

56 Voor $-\frac{4}{3} < x < 0$ is $x\sqrt{3x+4} < 0$ en $\sqrt{3x^3+4x^2} > 0$, dus $x\sqrt{3x+4} \neq \sqrt{3x^3+4x^2}$. Dit is de eerste fout.

$$2\sqrt{3x^3+4x^2} = 2 \cdot |x| \cdot \sqrt{3x+4} \neq 2x\sqrt{3x+4}, \text{ dus } \frac{1}{2\sqrt{3x^3+4x^2}} \cdot (9x^2+8x) \neq \frac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}}.$$

Dit is de tweede fout.

$$\frac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}} \text{ is niet gedefinieerd voor } x=0 \text{ en } \frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}} \text{ wel, dus } \frac{9x^2+8x}{2x\sqrt{3x+4}} \neq \frac{9x+8}{2\sqrt{3x+4}}.$$

Dit is de derde fout.

57 a $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{3x+1}$ geeft

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3x+1} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \frac{1}{2}\sqrt{3x+1} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{2(3x+1)}{4\sqrt{3x+1}} + \frac{3x}{4\sqrt{3x+1}} \\ = \frac{6x+2+3x}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}}$$

b Het randpunt is $(-\frac{1}{3}, 0)$.

$$\text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = rc_l = f'(0) = \frac{0+2}{4\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (-\frac{1}{3}, 0) \end{array} \right\} \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{3} + b = 0 \\ b = \frac{1}{6}$$

$$\text{Dus } k: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}.$$

c $f'(x) = 1\frac{3}{8}$ geeft

$$\frac{9x+2}{4\sqrt{3x+1}} = \frac{11}{8}$$

$$72x+16 = 44\sqrt{3x+1}$$

$$18x+4 = 11\sqrt{3x+1}$$

kwadrateren geeft

$$324x^2 + 144x + 16 = 121(3x+1)$$

$$324x^2 + 144x + 16 = 363x + 121$$

$$324x^2 - 219x - 105 = 0$$

$$D = (-219)^2 - 4 \cdot 324 \cdot -105 = 184041$$

$$x = \frac{219 \pm 429}{648} = 1 \vee x = \frac{219 - 429}{648} = -0,324...$$

vold.

vold. niet

$$f(1) = 1, \text{ dus } A(1, 1).$$

Bladzijde 75

58 a $8 - 2x \geq 0$

$$-2x \geq -8$$

$$x \leq 4$$

$$\text{Dus } D_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle.$$

b $f(x) = x\sqrt{8-2x}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{8-2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-2x}} \cdot -2 = \sqrt{8-2x} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-2x}{\sqrt{8-2x}} - \frac{x}{\sqrt{8-2x}} = \frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$$

c $f'(x) = 0$ geeft $\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 0$

$$8 - 3x = 0$$

$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{16}{9} \sqrt{6} = 1\frac{7}{9} \sqrt{6}$$

Dus de top is $(2\frac{2}{3}, 1\frac{7}{9}\sqrt{6})$ en $B_f = \langle \leftarrow, 1\frac{7}{9}\sqrt{6} \rangle$.

d $f'(x) = 1$ geeft $\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}} = 1$

$$8 - 3x = \sqrt{8-2x}$$

kwadrateren geeft

$$64 - 48x + 9x^2 = 8 - 2x$$

$$9x^2 - 46x + 56 = 0$$

$$D = (-46)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 56 = 100$$

$$x = \frac{46 \pm 10}{18} = 3\frac{1}{9} \vee x = \frac{46 - 10}{18} = 2$$

vold. niet

vold.

$$f(2) = 4, \text{ dus } A(2, 4).$$

59 a $f(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{x^2+4}}$ geeft

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot 4 - (4x+4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x}{x^2+4} = \frac{4\sqrt{x^2+4} - \frac{x(4x+4)}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4(x^2+4) - x(4x+4)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{4x^2 + 16 - 4x^2 - 4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \frac{16-4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{16-4x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = 0$$

$$16 - 4x = 0$$

$$-4x = -16$$

$$x = 4$$

$$f(4) = \frac{16+4}{\sqrt{4^2+4}} = \frac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

De coördinaten van de top zijn $(4, 2\sqrt{5})$.

b $f(x) = 0$ geeft $4x + 4 = 0$

$$4x = -4$$

$$x = -1$$

Dus $A(-1, 0)$.

Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(-1) = \frac{16 + 4}{((-1)^2 + 4)\sqrt{(-1)^2 + 4}} = \frac{20}{5\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot x + b \\ \text{door } A(-1, 0) \end{array} \right\} \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot (-1) + b = 0$$

$$b = \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

Dus $k: y = \frac{4}{5}\sqrt{5} \cdot x + \frac{4}{5}\sqrt{5}$ en het snijpunt met de y -as is $(0, \frac{4}{5}\sqrt{5})$.

$$f(0) = \frac{0 + 4}{\sqrt{0^2 + 4}} = 2, \text{ dus } B(0, 2).$$

Dus bewering I is niet waar, de lijn k gaat niet door B .

Stel $l: y = ax + b$ met $a = f'(0) = \frac{16 - 0}{(0^2 + 4)\sqrt{0^2 + 4}} = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(0, 2) \end{array} \right\} b = 2$$

Dus $l: y = 2x + 2$.

l snijden met de x -as, dus $y = 0$ geeft $2x + 2 = 0$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

Dus het snijpunt met de x -as is $(-1, 0)$.

Dus bewering II is waar, de lijn l gaat door A .

60 a $f(x) = 2x\sqrt{9 - 2x} - 3$ geeft

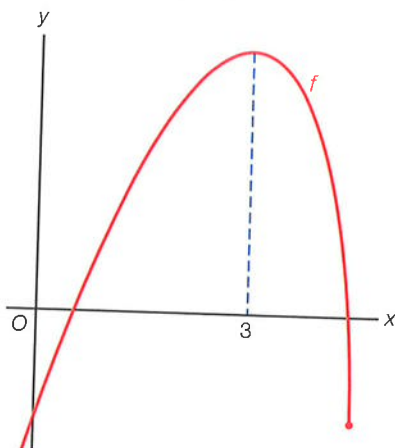
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \sqrt{9 - 2x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{9 - 2x}} \cdot (-2) = 2\sqrt{9 - 2x} - \frac{2x}{\sqrt{9 - 2x}} = \frac{2(9 - 2x)}{\sqrt{9 - 2x}} - \frac{2x}{\sqrt{9 - 2x}} \\ &= \frac{18 - 4x - 2x}{\sqrt{9 - 2x}} = \frac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}} = 0$$

$$18 - 6x = 0$$

$$-6x = -18$$

$$x = 3$$



max. is $f(3) = 6\sqrt{3} - 3$.

b $9 - 2x \geq 0$

$$-2x \geq -9$$

$$x \leq 4\frac{1}{2}$$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 4\frac{1}{2} \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 6\sqrt{3} - 3 \rangle$.

c Raaklijn evenwijdig met $y = 1\frac{1}{2}x$, dus $f'(x) = 1\frac{1}{2}$.

$$f'(x) = 1\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{18 - 6x}{\sqrt{9 - 2x}} = \frac{3}{2}$$

$$36 - 12x = 3\sqrt{9 - 2x}$$

$$12 - 4x = \sqrt{9 - 2x}$$

kwadrateren geeft

$$144 - 96x + 16x^2 = 9 - 2x$$

$$16x^2 - 94x + 135 = 0$$

$$D = (-94)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 135 = 196$$

$$x = \frac{94 \pm 14}{32} = 3\frac{3}{8} \vee x = \frac{94 - 14}{32} = 2\frac{1}{2}$$

vold. niet

vold.

$$f(2\frac{1}{2}) = 7, \text{ dus } A(2\frac{1}{2}, 7).$$

61 $f_p(x) = \frac{px}{\sqrt{x^2 + 9}}$ geeft $f_p'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9} \cdot p - px \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x}{x^2 + 9} = \frac{p(x^2 + 9) - px^2}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{9p}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$

$$f_p'(0) = \frac{9p}{9\sqrt{9}} = \frac{1}{3}p$$

$$f_p'(0) = 1 \text{ geeft } \frac{1}{3}p = 1$$

$$p = 3$$

$f_3(0) = 0$, dus voor $p = 3$ raakt de lijn $y = x$ de grafiek van f_p in de oorsprong.

6.4 Functies met parameters

Bladzijde 77

62 Raaklijn k heeft richtingscoëfficiënt $2\frac{1}{2}$, dus $f_p'(x) = 2\frac{1}{2}$.

Raken in het punt A met $x_A = 3$, dus $f_p'(3) = 2\frac{1}{2}$.

$$f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px + 2 \text{ geeft } f_p'(x) = \frac{1}{2}x + p$$

$$f_p'(3) = 2\frac{1}{2} \text{ geeft } \frac{1}{2} \cdot 3 + p = 2\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2} + p = 2\frac{1}{2}$$

$$p = 1$$

63 a $f_p(x) = (x^2 + p) \cdot \sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}} + p\sqrt{x}$ geeft $f_p'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x\sqrt{x}}{2} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + p}{2\sqrt{x}}$

b $f_p'(4) = rc_k$

$$\frac{5 \cdot 4^2 + p}{2\sqrt{4}} = 18$$

$$\frac{80 + p}{4} = 18$$

$$80 + p = 72$$

$$p = -8$$

c $f_{-8}(4) = (16 - 8) \cdot \sqrt{4} = 16$, dus $A(4, 16)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 18x + q \\ \text{door } A(4, 16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 18 \cdot 4 + q = 16 \\ 72 + q = 16 \\ q = -56 \end{array}$$

64 $f_p(x) = \sqrt{2x^2 + p}$ geeft $f_p'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + p}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + p}}$

$$f_p'(1) = \frac{2}{3} \text{ geeft } \frac{2}{\sqrt{2+p}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{2+p} = 3$$

$$2+p = 9$$

$$p = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + q \\ f_7(1) = 3, \text{ dus } A(1, 3) \end{array} \right\} \frac{2}{3} + q = 3$$

$$q = 2\frac{1}{3}$$

Dus $p = 7$ en $q = 2\frac{1}{3}$.

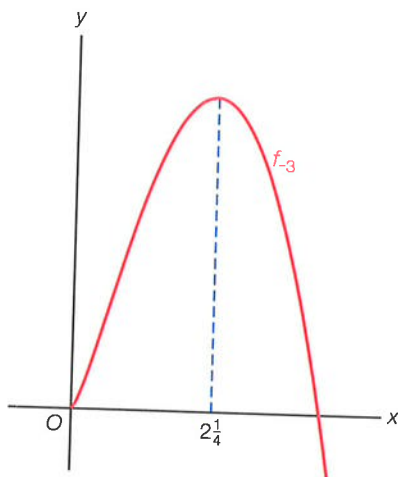
65 a $f_p(x) = 6x\sqrt{x} + px^2 = 6x^{1\frac{1}{2}} + px^2$ geeft $f_p'(x) = 9x^{\frac{1}{2}} + 2px = 9\sqrt{x} + 2px$

$$f_p'(2\frac{1}{4}) = 0 \text{ geeft } 9 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + 2p \cdot 2\frac{1}{4} = 0$$

$$9 \cdot 1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}p = 0$$

$$4\frac{1}{2}p = -13\frac{1}{2}$$

$$p = -3$$



Dus f_p heeft een maximum voor $x = 2\frac{1}{4}$ als $p = -3$.

b $k: y = 5x + q$ raakt de grafiek van f_p in A met $x_A = 1$ geeft $f_p'(1) = rc_k$

$$\begin{aligned} 9 \cdot \sqrt{1} + 2p \cdot 1 &= 5 \\ 9 + 2p &= 5 \\ 2p &= -4 \\ p &= -2 \end{aligned}$$

$$f_{-2}(x) = 6x\sqrt{x} - 2x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 5x + q \\ f_{-2}(1) = 4, \text{ dus } A(1, 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \cdot 1 + q = 4 \\ q = -1 \end{array}$$

Dus $p = -2$ en $q = -1$.

Bladzijde 78

66 a $f_p(x) = \frac{4x+p}{x^2+1}$ geeft

$$f_p'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 4 - (4x+p) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2-2px}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2-2px+4}{(x^2+1)^2}$$

$$a = f_p'(0) = \frac{-4 \cdot 0^2 - 2p \cdot 0 + 4}{(0^2+1)^2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = 4x + 4 \text{ snijdt de } y\text{-as in } (0, 4) \\ f_p(0) = p, \text{ dus door } (0, p) \end{array} \right\} p = 4$$

Dus $a = 4$ en $p = 4$.

b l: $y = -x + b$ raakt de grafiek in A met $x_A = -1$, dus $f_p'(-1) = \text{rc}_l$.

$$f_p'(-1) = -1 \text{ geeft } \frac{-4 \cdot (-1)^2 - 2p \cdot (-1) + 4}{((-1)^2 + 1)^2} = -1$$

$$\frac{-4 + 2p + 4}{(1+1)^2} = -1$$

$$\frac{2p}{4} = -1$$

$$2p = -4$$

$$p = -2$$

$$f_{-2}(x) = \frac{4x-2}{x^2+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} l: y = -x + b \\ f_{-2}(-1) = \frac{4 \cdot (-1) - 2}{(-1)^2 + 1} = -3, \text{ dus } A(-1, -3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 + b = -3 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus l: $y = -x - 4$.

c Een extreme waarde voor $x = 2$ geeft $f_p'(2) = 0$

$$\frac{-4 \cdot 2^2 - 2p \cdot 2 + 4}{(2^2+1)^2} = 0$$

$$-12 - 4p = 0$$

$$-4p = 12$$

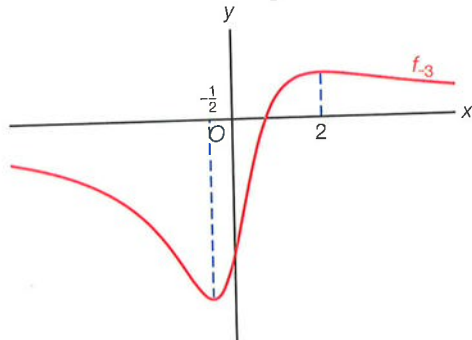
$$p = -3$$

$$f_{-3}'(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$

$$f_{-3}'(x) = 0 \text{ geeft } -4x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 4 = 100$$

$$x = \frac{-6 \pm 10}{-8} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-6 - 10}{-8} = 2$$



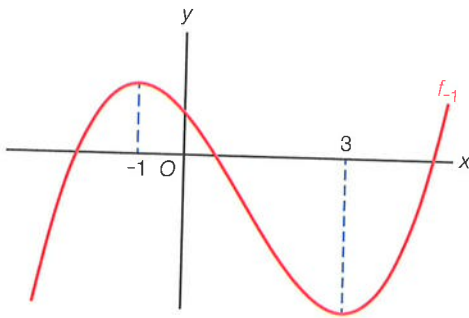
$$\text{min. is } f_{-3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -4.$$

67 a $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p$ geeft $f'_p(x) = x^2 + 2px - 3$
 f_p heeft twee extremen als $f'_p(x) = 0$ twee oplossingen heeft.
 $D = (2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 4p^2 + 12$

$4p^2 + 12$ is voor elke p groter dan nul, dus $f'_p(x) = 0$ heeft voor elke p twee oplossingen.

b f_p heeft een extreme waarde voor $x = 3$, dus $f'_p(3) = 0$
 $3^2 + 2p \cdot 3 - 3 = 0$
 $9 + 6p - 3 = 0$
 $6p = -6$
 $p = -1$

$f_{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ en $f'_{-1}(x) = x^2 - 2x - 3$
 $f'_{-1}(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$



max. is $f_{-1}(-1) = 2\frac{2}{3}$.

c $l: y = -x + q$ raakt de grafiek van f_p in B met $x_B = -2$, dus $f'_p(-2) = rc_l$
 $(-2)^2 + 2p \cdot -2 - 3 = -1$
 $-4p = -2$
 $p = \frac{1}{2}$

$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}$

$l: y = -x + q$
 $f_{\frac{1}{2}}(-2) = 4\frac{5}{6}$, dus $B(-2, 4\frac{5}{6})$ } $2 + q = 4\frac{5}{6}$
 $q = 2\frac{5}{6}$

Dus $p = \frac{1}{2}$ en $q = 2\frac{5}{6}$.

68 $f_{p,q}(2) = 2$ geeft $\frac{2+p}{\sqrt{4+q}} = 2$
 $2+p = 2\sqrt{4+q}$
 $p = -2 + 2\sqrt{4+q}$

$f_{p,q}(x) = \frac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ geeft

$f'_{p,q}(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{x^2+q} = \frac{\sqrt{x^2+q} - \frac{x(x+p)}{\sqrt{x^2+q}}}{x^2+q} = \frac{x^2+q - x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$

$f'_{p,q}(2) = -\frac{1}{9}$ geeft $\frac{q-2p}{(4+q)\sqrt{4+q}} = -\frac{1}{9}$

$q - 2p = -\frac{1}{9}(4+q)\sqrt{4+q}$

$-2p = -q - \frac{1}{9}(4+q)\sqrt{4+q}$

$p = \frac{1}{2}q + \frac{1}{18}(4+q)\sqrt{4+q}$

Voer in $y_1 = -2 + 2\sqrt{4+x}$ en $y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{18}(4+x)\sqrt{4+x}$.

De optie snijpunt geeft $x = -4$ en $y = -2$ en ook $x = 5$ en $y = 4$.

$p = -2$ en $q = -4$ voldoet niet, want $A(2, 2)$ ligt niet op de grafiek van $f_{-2,-4}(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$.

Dus $p = 4$ en $q = 5$.

69 $f_p'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + px + 3$ geeft $f_p'(x) = -\frac{1}{2}x + p$
 $f_p'(x) = 0$ geeft $-\frac{1}{2}x + p = 0$
 $p = \frac{1}{2}x$

Bladzijde 80

- 70 a Je hoeft alleen de formule op te stellen van de kromme waarop alle toppen liggen.
 Je hoeft niet aan te tonen dat alle punten van die kromme een top zijn.
 b $f_p'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2p \cdot 0 + 2 = 2 \neq 0$, dus voor elke waarde van p geldt dat $f_p'(0) \neq 0$,
 dus $(0, 3)$ is geen top van een van de grafieken van f_p .
 c De formule van de kromme waarop alle toppen liggen, wil niet zeggen dat elk punt
 op de kromme per se een top is. Het punt $(0, 3)$ ligt dus wel op de kromme, maar
 hoeft dus geen top te zijn.

Bladzijde 81

71 $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x + 5$ geeft $f_p'(x) = x^2 + 2px + 3$
 $f_p'(x) = 0$ geeft $x^2 + 2px + 3 = 0$
 $2px = -x^2 - 3$
 voor $x \neq 0$ geldt $p = \frac{-x^2 - 3}{2x}$ $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{-x^2 - 3}{2x} \cdot x^2 + 3x + 5 \\ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 3x + 5 \end{array} \right.$
 $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + 5$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + 5$.

- 72 a Extreme waarde voor $x = 1$, dus $f_p'(1) = 0$.

$$f_p(x) = \frac{x+p}{x^2+4} \text{ geeft } f_p'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 1 - (x+p) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2-2px}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2-2px+4}{(x^2+4)^2}$$

$$f_p'(1) = 0 \text{ geeft } \frac{-1^2 - 2p \cdot 1 + 4}{(1^2 + 4)^2} = 0$$

$$-1 - 2p + 4 = 0$$

$$-2p = -3$$

$$p = 1\frac{1}{2}$$

$$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = \frac{-x^2 - 3x + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-x^2 - 3x + 4}{(x^2 + 4)^2} = 0$$

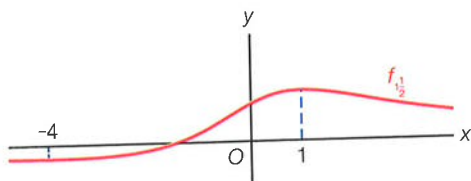
$$-x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x+4) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -4$$

$$f_{1\frac{1}{2}}(-4) = \frac{-4 + 1\frac{1}{2}}{(-4)^2 + 4} = \frac{-2\frac{1}{2}}{20} = -\frac{1}{8}$$



Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en min. is $f_{1\frac{1}{2}}(-4) = -\frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } f_p'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{-x^2 - 2px + 4}{(x^2 + 4)^2} &= 0 \\
 -x^2 - 2px + 4 &= 0 \\
 -2px &= x^2 - 4 \\
 \text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p &= \frac{-x^2 + 4}{2x} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{x + \frac{-x^2 + 4}{2x}}{x^2 + 4} \\ y = \frac{2x^2 - x^2 + 4}{2x(x^2 + 4)} \\ y = \frac{x^2 + 4}{2x(x^2 + 4)} \\ y = \frac{1}{2x} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Dus alle toppen liggen op de kromme $y = \frac{1}{2x}$.

$$\begin{aligned}
 \text{73 a } f_p(x) &= (p - x^2) \cdot \sqrt{x} = p\sqrt{x} - x^{2\frac{1}{2}} \text{ geeft } f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} - 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2\sqrt{x}} - \frac{5x\sqrt{x}}{2} = \frac{p - 5x^2}{2\sqrt{x}} \\
 f_p'(x) = 0 \text{ geeft } \frac{p - 5x^2}{2\sqrt{x}} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p - 5x^2 &= 0 \\
 p &= 5x^2 \\
 y &= (p - x^2) \cdot \sqrt{x} \left\{ \begin{array}{l} y = (5x^2 - x^2) \cdot \sqrt{x} \\ y = 4x^2 \cdot \sqrt{x} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = 4x^2 \cdot \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b } y &= 8 \\
 4x^2 \cdot \sqrt{x} &= 8 \\
 x^2 \sqrt{x} &= 2 \\
 x^5 &= 4 \\
 x &= 4^{\frac{1}{5}} \left\{ \begin{array}{l} p = 5x^2 \\ p = 5 \cdot (4^{\frac{1}{5}})^2 = 5 \cdot 4^{\frac{2}{5}} = 5 \cdot \sqrt[5]{16} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{74 a } f(1) &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + 1\frac{1}{2} = 3 \text{ en } g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3 \\
 \text{Dus } A(1, 3) &\text{ ligt op de grafiek van } f \text{ en op de grafiek van } g.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b } f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2} \text{ geeft } f'(x) = x + 1 \\
 \text{Stel } k: y &= ax + b \text{ met } a = f'(1) = 2. \\
 k: y &= 2x + b \left\{ \begin{array}{l} 2 + b = 3 \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right. \\
 b &= 1
 \end{aligned}$$

Dus $k: y = 2x + 1$.

$$g(x) = -x^2 + 4x \text{ geeft } g'(x) = -2x + 4$$

Stel $l: y = ax + b$ met $a = g'(1) = 2$.

$$\begin{aligned}
 l: y &= 2x + b \left\{ \begin{array}{l} 2 + b = 3 \\ \text{door } A(1, 3) \end{array} \right. \\
 b &= 1
 \end{aligned}$$

Dus $l: y = 2x + 1$.

c A is het punt waar de raaklijnen van de grafieken van f en g samenvallen.

Bladzijde 82

- 75** De grafieken hebben voor $x = -3$ geen punt gemeenschappelijk, dus ze raken elkaar niet. Wel geldt dat voor $x = -3$ de raaklijn van de grafiek van f en de raaklijn van de grafiek van g evenwijdig zijn.

- 76 a** $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$
 $g(x) = x^2 + 11x + 28$ geeft $g'(x) = 2x + 11$
 $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$
 $x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = x^2 + 11x + 28 \wedge 3x^2 + 8x + 2 = 2x + 11$
 $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0 \wedge 3x^2 + 6x - 9 = 0$
 $3x^2 + 6x - 9 = 0$ geeft $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1 \vee x = -3$
 Substitutie van $x = 1$ in $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ geeft
 $1 + 3 - 9 - 27 = 0$ klopt niet.
 Substitutie van $x = -3$ in $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ geeft
 $-27 + 27 + 27 - 27 = 0$ klopt, dus de grafieken raken elkaar voor $x = -3$.
 $f(-3) = 4$, dus het raakpunt is $(-3, 4)$.
- b** $g'(-3) = -6 + 11 = 5$
 $y = 5x + b$
 door $(-3, 4)$ $\left. \begin{array}{l} 5 \cdot -3 + b = 4 \\ b = 19 \end{array} \right\}$
 Dus de gemeenschappelijke raaklijn is $y = 5x + 19$.

- 77 a** $f(x) = \sqrt{2x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$
 $g_1(x) = x^2 + 1$ geeft $g_1'(x) = 2x$
 $f(x) = g_1(x) \wedge f'(x) = g_1'(x)$
 $\sqrt{2x} = x^2 + 1 \wedge \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$
 $\sqrt{2x} = x^2 + 1 \wedge 2x\sqrt{2x} = 1$
 $2x\sqrt{2x} = 1$ kwadrateren geeft $(2x)^3 = 1$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
 Substitutie van $x = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2x} = x^2 + 1$ geeft
 $\sqrt{1} = \frac{1}{4} + 1$ klopt niet.
 Dus de grafieken van f en g_1 raken elkaar niet.
- b** $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$
 $\sqrt{2x} = x^2 + p \wedge \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$
 $x = \frac{1}{2}$
 Substitutie van $x = \frac{1}{2}$ in $\sqrt{2x} = x^2 + p$ geeft $\sqrt{1} = \frac{1}{4} + p$
 $p = \frac{3}{4}$
 Dus de grafieken raken elkaar voor $p = \frac{3}{4}$.

Bladzijde 83

- 78 a** De grafieken van $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3}$ raken elkaar als

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$$

$$x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3} \wedge 3x^2 - 4x = x^2$$

$$3x^2 - 4x = x^2 \text{ geeft } 2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

$$x = 0 \wedge x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3} \text{ geeft } 0 = -2\frac{2}{3}, \text{ dus voldoet niet.}$$

$$x = 2 \wedge x^3 - 2x^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{2}{3} \text{ geeft } 8 - 8 = \frac{1}{3} \cdot 8 - 2\frac{2}{3} \text{ klopt.}$$

Dus de grafieken raken elkaar voor $x = 2$.

$$f(2) = 0, \text{ dus het raakpunt is } (2, 0).$$

- b** $h(x) = -x^2 + 8x - 12$ geeft $h'(x) = -2x + 8$

$$k_p(x) = x^2 + px \text{ geeft } k_p'(x) = 2x + p$$

$$h(x) = k_p(x) \wedge h'(x) = k_p'(x)$$

$$-x^2 + 8x - 12 = x^2 + px \wedge -2x + 8 = 2x + p$$

$$-2x^2 + (8 - p)x - 12 = 0 \wedge -4x + 8 = p$$

$$\text{Substitutie van } p = -4x + 8 \text{ in } -2x^2 + (8 - p)x - 12 = 0 \text{ geeft } -2x^2 + (8 - (-4x + 8))x - 12 = 0$$

$$-2x^2 + (8 + 4x - 8)x - 12 = 0$$

$$-2x^2 + 4x^2 - 12 = 0$$

$$2x^2 = 12$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{6} \\ p = -4x + 8 \end{array} \right\} p = -4\sqrt{6} + 8$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\sqrt{6} \\ p = -4x + 8 \end{array} \right\} p = 4\sqrt{6} + 8$$

$$\text{Dus } p = -4\sqrt{6} + 8 \vee p = 4\sqrt{6} + 8.$$

79 $f_{p,q}(x) = \frac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ geeft

$$f_{p,q}'(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{x^2+q} = \frac{\sqrt{x^2+q} - \frac{x(x+p)}{\sqrt{x^2+q}}}{x^2+q} = \frac{x^2+q - x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$$

$$g(x) = -1\frac{3}{8}x^2 + 2\frac{7}{8}x \text{ geeft } g'(x) = -2\frac{3}{4}x + 2\frac{7}{8}$$

De grafieken van $f_{p,q}$ en g raken elkaar voor $x = 1$, dus

$$f_{p,q}(1) = g(1) \wedge f_{p,q}'(1) = g'(1)$$

$$\frac{1+p}{\sqrt{1+q}} = -1\frac{3}{8} + 2\frac{7}{8} \wedge \frac{q-p}{(1+q)\sqrt{1+q}} = -2\frac{3}{4} + 2\frac{7}{8}$$

$$\frac{1+p}{\sqrt{1+q}} = \frac{3}{2} \wedge \frac{q-p}{(1+q)\sqrt{1+q}} = \frac{1}{8}$$

$$2 + 2p = 3\sqrt{1+q} \wedge 8q - 8p = (1+q)\sqrt{1+q}$$

$$2p = -2 + 3\sqrt{1+q} \wedge -8p = -8q + (1+q)\sqrt{1+q}$$

$$p = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+q} \wedge p = q - \frac{1}{8}(1+q)\sqrt{1+q}$$

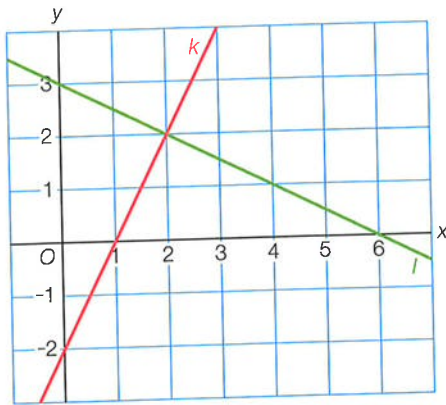
$$\text{Hieruit volgt } -1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+q} = q - \frac{1}{8}(1+q)\sqrt{1+q}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{1+x} \text{ en } y_2 = x - \frac{1}{8}(1+x)\sqrt{1+x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = -1$ en $y = -1$, $x = 3$ en $y = 2$, en $x = 35$ en $y = 8$.

$$p = -1 \text{ en } q = -1 \text{ voldoet niet, want het punt } A \text{ met } x_A = 1 \text{ ligt niet op de grafiek van } f_{-1,-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\text{Dus } p = 2 \text{ en } q = 3 \text{ of } p = 8 \text{ en } q = 35.$$

80 a

b Ja, bij de lijn k ga je 1 naar rechts en 2 omhoog, bij de lijn l ga je 2 naar rechts en 1 omlaag.

c m loodrecht op k , oftewel m evenwijdig met l .

Stel $m: y = ax + b$ met $a = rc_m = rc_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(4, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 0 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x + 2$.

d $rc_p = \frac{1}{4}$, dus bij p ga je 4 naar rechts en 1 omhoog.

Dus bij n ga je 1 naar rechts en 4 omlaag.

Stel $n: y = ax + b$ met $a = rc_n = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x + b \\ \text{door } B(1, 3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} -4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = 7 \end{array}$$

Dus $n: y = -4x + 7$.

Bladzijde 84

81 a $f(x) = \sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10$ geeft $g'(x) = -x$.

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$$

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 10 \wedge \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1 \text{ geeft } \frac{x}{2\sqrt{x}} = 1$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$\text{Substitutie van } x = 4 \text{ in } \sqrt{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 10 \text{ geeft } \sqrt{4} = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 10$$

$$2 = -8 + 10$$

$$2 = 2$$

Dit klopt, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

b $h_p(x) = p\sqrt{x}$ geeft $h_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}}$ en $k(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$ geeft $k'(x) = -\frac{1}{3}x$.

$$h_p(x) = k(x) \wedge h_p'(x) \cdot k'(x) = -1$$

$$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge \frac{p}{2\sqrt{x}} \cdot -\frac{1}{3}x = -1$$

$$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge -\frac{1}{6}p\sqrt{x} = -1$$

$$p\sqrt{x} = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3} \wedge p\sqrt{x} = 6$$

$$\text{Hieruit volgt } 6 = -\frac{1}{6}x^2 + 8\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{6}x^2 = 2\frac{2}{3}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \vee x = -4$$

$$x = 4 \text{ geeft } p\sqrt{4} = 6$$

$$2p = 6$$

$$p = 3$$

$$x = -4 \text{ voldoet niet.}$$

$$k(4) = 6$$

Dus $p = 3$ en het snijpunt is $(4, 6)$.

Bladzijde 85

82 a $f(x) = x^2 - 4x$ geeft $f'(x) = 2x - 4$

$$f'(5) = 10 - 4 = 6$$

$$rc_k \cdot 6 = -1, \text{ dus } rc_k = -\frac{1}{6}.$$

$$k: y = -\frac{1}{6}x + b \left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{6} + b = 5 \\ \text{door } A(5, 5) \end{array} \right.$$

$$b = 5\frac{5}{6}$$

$$\text{Dus } k: y = -\frac{1}{6}x + 5\frac{5}{6}.$$

b $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ geeft $g'(x) = \frac{(x+2) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

$$g(x) = -5x + p \wedge g'(x) \cdot rc_l = -1$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = -5x + p \wedge \frac{5}{(x+2)^2} \cdot -5 = -1$$

$$p = 5x + \frac{2x-1}{x+2} \wedge \frac{25}{(x+2)^2} = 1$$

$$\frac{25}{(x+2)^2} = 1 \text{ geeft } (x+2)^2 = 25$$

$$x+2 = 5 \vee x+2 = -5$$

$$x = 3 \vee x = -7$$

$$x = 3$$

$$p = 5x + \frac{2x-1}{x+2} \left\{ \begin{array}{l} p = 15 + \frac{5}{5} = 16 \end{array} \right.$$

$$x = -7$$

$$p = 5x + \frac{2x-1}{x+2} \left\{ \begin{array}{l} p = -35 + \frac{-15}{-5} = -32 \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } p = 16 \vee p = -32.$$

83 a $f(x) = x^2 - x$ geeft $f'(x) = 2x - 1$ en $g_p(x) = \frac{p}{x} = px^{-1}$ geeft $g_p'(x) = -px^{-2} = -\frac{p}{x^2}$.

$$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$$

$$x^2 - x = \frac{p}{x} \wedge (2x - 1) = -\frac{p}{x^2}$$

$$x^3 - x^2 = p \wedge 2x^3 - x^2 = -p$$

$$p = x^3 - x^2 \wedge p = -2x^3 + x^2$$

$$x^3 - x^2 = -2x^3 + x^2$$

$$3x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(3x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

vold. niet vold.

$$x = \frac{2}{3} \left. \vphantom{\begin{matrix} x = \frac{2}{3} \\ p = x^3 - x^2 \end{matrix}} \right\} p = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}$$

Dus $p = -\frac{4}{27}$ en $A\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}\right)$.

b $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$$x^2 - x = \frac{p}{x} \wedge (2x - 1) \cdot -\frac{p}{x^2} = -1$$

$$x^3 - x^2 = p \wedge p(2x - 1) = x^2$$

$$(x^3 - x^2)(2x - 1) = x^2$$

$$x^2(x - 1)(2x - 1) = x^2$$

$$x \neq 0, \text{ dus } (x - 1)(2x - 1) = 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 1$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$$

vold. niet vold.

$$x = \frac{3}{2} \left. \vphantom{\begin{matrix} x = \frac{3}{2} \\ p = x^3 - x^2 \end{matrix}} \right\} p = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9}{8}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Dus $p = 1\frac{1}{8}$ en $B\left(1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

84 $f_{p,q}(x) = \frac{x+p}{\sqrt{x^2+q}}$ geeft $f_{p,q}'(x) = \frac{\sqrt{x^2+q} \cdot 1 - (x+p) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+q}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+q})^2} = \frac{x^2+q - x(x+p)}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}} = \frac{q-px}{(x^2+q)\sqrt{x^2+q}}$

$g(x) = x^2 - 3x - 1\frac{1}{2}$ geeft $g'(x) = 2x - 3$
 De grafieken van $f_{p,q}$ en g snijden elkaar loodrecht voor $x = 4$, dus
 $f_{p,q}(4) = g(4) \wedge f_{p,q}'(4) \cdot g'(4) = -1$

$$\frac{4+p}{\sqrt{16+q}} = 2\frac{1}{2} \wedge \frac{q-4p}{(16+q)\sqrt{16+q}} \cdot 5 = -1$$

$$4+p = 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} \wedge 5q - 20p = -(16+q)\sqrt{16+q}$$

$$p = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} \wedge -20p = -5q - (16+q)\sqrt{16+q}$$

$$p = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} \wedge p = \frac{1}{4}q + \frac{1}{20}(16+q)\sqrt{16+q}$$

$$\text{Hieruit volgt } -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+q} = \frac{1}{4}q + \frac{1}{20}(16+q)\sqrt{16+q}.$$

$$\text{Voer in } y_1 = -4 + 2\frac{1}{2}\sqrt{16+x} \text{ en } y_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}(16+x)\sqrt{16+x}.$$

De optie snijpunt geeft $x = -16$ en $y = -4$, en $x = 9$ en $y = 8\frac{1}{2}$.

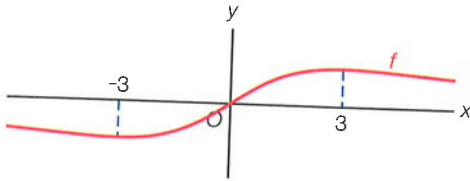
$p = -4$ en $q = -16$ voldoet niet, want het punt A met $x_A = 4$ ligt niet op de grafiek van $f_{-4,-16}(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$.

Dus $p = 8\frac{1}{2}$ en $q = 9$.

Diagnostische toets

Bladzijde 88

1 $f(x) = \frac{6x}{x^2+9}$ geeft $f'(x) = \frac{(x^2+9) \cdot 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{6x^2+54-12x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{-6x^2+54}{(x^2+9)^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $-6x^2+54=0$
 $-6x^2 = -54$
 $x^2 = 9$
 $x = 3 \vee x = -3$

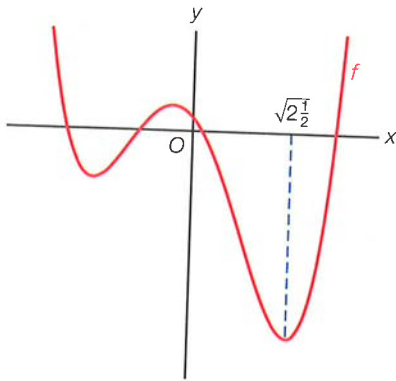


min. is $f(-3) = -1$ en max. is $f(3) = 1$.

$f(x) = 0$ geeft $6x = 0$, dus $x = 0$.

De grafiek snijdt de x-as alleen in $(0, 0)$, dus $B_f = [-1, 1]$.

2 $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 45x^2 - 30x + 5$ geeft $f'(x) = 36x^3 + 12x^2 - 90x - 30$
 $f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 36 \cdot 2\frac{1}{2}\sqrt{2\frac{1}{2}} + 12 \cdot 2\frac{1}{2} - 90\sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 90\sqrt{2\frac{1}{2}} + 30 - 90\sqrt{2\frac{1}{2}} - 30 = 0$



$f'(\sqrt{2\frac{1}{2}}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2\frac{1}{2}}$.

3 a $f(x) = 4 - (x^3 + 1)^2 = 4 - (x^6 + 2x^3 + 1) = -x^6 - 2x^3 + 3$ geeft $f'(x) = -6x^5 - 6x^2$
 $f'(x) = 0$ geeft $-6x^5 - 6x^2 = 0$
 $-6x^2(x^3 + 1) = 0$
 $-6x^2 = 0 \vee x^3 = -1$
 $x = 0 \vee x = -1$

$f(-1) = 4$, dus de top is $(-1, 4)$.

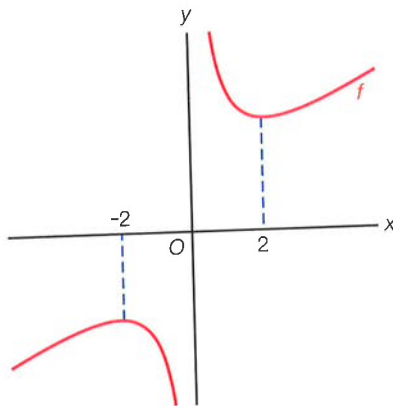
b $f'(x) = -6x^5 - 6x^2$ geeft $f''(x) = -30x^4 - 12x$
 $f''(x) = 0$ geeft $-30x^4 - 12x = 0$
 $-6x(5x^3 + 2) = 0$
 $-6x = 0 \vee 5x^3 = -2$
 $x = 0 \vee x^3 = -\frac{2}{5}$
 $x = 0 \vee x = \sqrt[3]{-\frac{2}{5}}$

$f(0) = 3$ en $f(\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}) = 4 - (-\frac{2}{5} + 1)^2 = 4 - \frac{9}{25} = 3\frac{16}{25}$

Dus de buigpunten zijn $(0, 3)$ en $(\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}, 3\frac{16}{25})$.

4 a $f(x) = \frac{5}{x^6} = 5x^{-6}$ geeft $f'(x) = -30x^{-7} = -\frac{30}{x^7}$
 b $g(x) = \frac{x^6 - 2x^4}{x^5} = x - 2x^{-1}$ geeft $g'(x) = 1 + 2x^{-2} = 1 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}$
 c $h(x) = 4x^3 - \frac{3x-2}{x^3} = 4x^3 - 3x^{-2} + 2x^{-3}$ geeft
 $h'(x) = 12x^2 + 6x^{-3} - 6x^{-4} = 12x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} = 12x^2 + \frac{6x-6}{x^4}$

5 a $f(x) = 2x + \frac{8}{x} + 1 = 2x + 8x^{-1} + 1$ geeft $f'(x) = 2 - 8x^{-2} = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$
 $f'(x) = 0$ geeft $2x^2 - 8 = 0$
 $2x^2 = 8$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$



max. is $f(-2) = -7$ en min. is $f(2) = 9$.

b $f'(x) = -6$ geeft $\frac{2x^2 - 8}{x^2} = -6$
 $2x^2 - 8 = -6x^2$
 $8x^2 = 8$
 $x^2 = 1$
 $x = 1 \vee x = -1$

$f(1) = 11$ en $f(-1) = -9$
 Dus de raakpunten zijn $(1, 11)$ en $(-1, -9)$.

c $f'(x) = 3$ geeft $\frac{2x^2 - 8}{x^2} = 3$
 $2x^2 - 8 = 3x^2$
 $-x^2 = 8$
 $x^2 = -8$

geen oplossingen

Er is dus geen raaklijn met richtingscoëfficiënt 3.

6 a $f(x) = \frac{8x^6 - x^4}{x\sqrt{x}} = \frac{8x^6 - x^4}{x^{1\frac{1}{2}}} = 8x^{4\frac{1}{2}} - x^{2\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 36x^{3\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 36x^3 \cdot \sqrt{x} - 2\frac{1}{2}x\sqrt{x}$
 b $g(x) = \frac{6x - x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^3} = \frac{6x - x^{2\frac{1}{3}}}{x^3} = 6x^{-2} - x^{-\frac{2}{3}}$ geeft $g'(x) = -12x^{-3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{-12}{x^3} + \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3x^3} = \frac{-36 + 2x \cdot \sqrt[3]{x}}{3x^3}$
 c $h(x) = (x^2 + 2\sqrt{x})^2 = x^4 + 4x^2 \cdot \sqrt{x} + 4x = x^4 + 4x^{2\frac{1}{2}} + 4x$ geeft
 $h'(x) = 4x^3 + 10x^{\frac{1}{2}} + 4 = 4x^3 + 10x\sqrt{x} + 4$

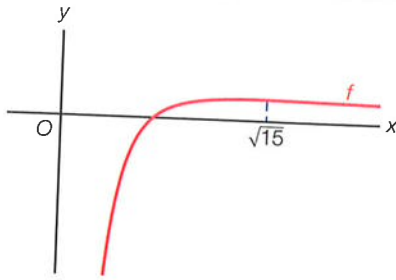
$$7 \quad f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 - 3}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-2\frac{1}{2}} \text{ geeft } f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 7\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}} = \frac{-x^2}{2x^{3\frac{1}{2}}} + \frac{15}{2x^{3\frac{1}{2}}} = \frac{-x^2 + 15}{2x^3 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } -x^2 + 15 = 0$$

$$x^2 = 15$$

$$x = \sqrt{15} \vee x = -\sqrt{15}$$

vold. vold. niet



$$y_{\text{top}} = f(\sqrt{15}) = \frac{15 - 3}{15 \cdot \sqrt{\sqrt{15}}} = \frac{12}{15 \cdot \sqrt[4]{15}} = \frac{4}{5 \cdot \sqrt[4]{15}}$$

Dus $a = 4$, $b = 5$ en $c = 15$ zijn mogelijke waarden.

Bladzijde 89

$$8 \quad a \quad f(x) = x^3 - \frac{5}{(2x^2 - x)^4} = x^3 - 5(2x^2 - x)^{-4} \text{ geeft } f'(x) = 3x^2 + 20(2x^2 - x)^{-5} \cdot (4x - 1) = 3x^2 + \frac{80x - 20}{(2x^2 - x)^5}$$

$$b \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 15} \text{ geeft } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 6x + 15}} \cdot (2x - 6) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 15}}$$

$$c \quad h(x) = (x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2} = (x^2 + 2)^{1\frac{1}{2}} \text{ geeft } h'(x) = 1\frac{1}{2}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 + 2}$$

$$9 \quad a \quad f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^3 - x^2 \text{ geeft } f'(x) = (x^2 - 2)^2 \cdot 2x - 2x = 2x(x^2 - 2)^2 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 2x(x^2 - 2)^2 - 2x = 0$$

$$2x((x^2 - 2)^2 - 1) = 0$$

$$2x = 0 \vee (x^2 - 2)^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x^2 - 2 = 1 \vee x^2 - 2 = -1$$

$$x = 0 \vee x^2 = 3 \vee x^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 1 \vee x = -1$$

$$b \quad \text{Stel } k: y = ax + b \text{ met } a = f'(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 = 12.$$

$$y = 12x + b$$

$$f(2) = -1\frac{1}{3}, \text{ dus } A(2, -1\frac{1}{3}) \left\{ \begin{array}{l} 12 \cdot 2 + b = -1\frac{1}{3} \\ 24 + b = -1\frac{1}{3} \\ b = -25\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Dus } k: y = 12x - 25\frac{1}{3}.$$

$$y = 0 \text{ geeft } 12x - 25\frac{1}{3} = 0$$

$$12x = \frac{76}{3}$$

$$x = \frac{76}{36} = 2\frac{1}{9}$$

$$\text{Dus } x_B = 2\frac{1}{9}.$$

10 a $f(x) = x\sqrt{50-x^2}$ geeft

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{50-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{50-x^2}} \cdot -2x = \sqrt{50-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{50-x^2}} = \frac{50-x^2-x^2}{\sqrt{50-x^2}} = \frac{50-2x^2}{\sqrt{50-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ geeft } 50 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \vee x = -5$$

min. is $f(-5) = -25$ en max. is $f(5) = 25$.

Dus $B_f = [-25, 25]$.

b Stel $k: y = ax + b$ met $a = f'(1) = \frac{50-2}{\sqrt{50-1}} = \frac{48}{\sqrt{49}} = 6\frac{6}{7}$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 6\frac{6}{7}x + b \\ f(1) = 7, \text{ dus } A(1, 7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6\frac{6}{7} \cdot 1 + b = 7 \\ b = \frac{1}{7} \end{array}$$

$$\text{Dus } k: y = 6\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}.$$

11 a $f_p(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + px + 2$ geeft $f_p'(x) = 2x^2 - 8x + p$

$$f_p'(3) = 0 \text{ geeft } 18 - 24 + p = 0$$

$$p = 6$$

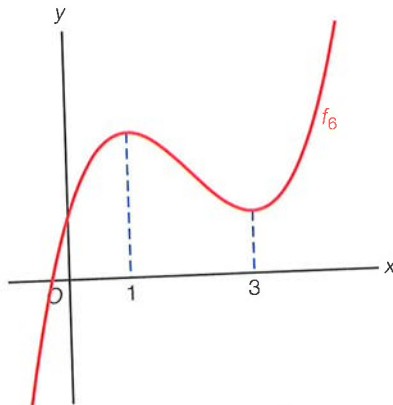
$$f_6(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2 \text{ en } f_6'(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$f_6'(x) = 0 \text{ geeft } 2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 3$$



$$f_6(1) = \frac{2}{3} - 4 + 6 + 2 = 4\frac{2}{3}$$

$$\text{Dus max. is } f_6(1) = 4\frac{2}{3}.$$

b Voor raken geldt $f_p'(-1) = 12 + q \wedge f_p'(-1) = 12$

$$f_p'(-1) = 12 \text{ geeft } 2 + 8 + p = 12$$

$$p = 2$$

$$f_2(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + 2$$

$$f_2(-1) = -12 + q \text{ geeft } -\frac{2}{3} - 4 - 2 + 2 = -12 + q$$

$$q = 7\frac{1}{3}$$

$$\text{Dus } p = 2 \text{ en } q = 7\frac{1}{3}.$$

12 $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 3x - 4$ geeft $f'_p(x) = -x^2 + 2px + 3$
 $f'_p(x) = 0$ geeft $-x^2 + 2px + 3 = 0$
 $2px = x^2 - 3$

$$\text{voor } x \neq 0 \text{ geldt } p = \frac{x^2 - 3}{2x} \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2 - 3}{2x} \cdot x^2 + 3x - 4 \\ y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 3x - 4 \\ y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4 \end{array} \right.$$

De formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{1}{2}x - 4$.

13 a $f(x) = x^3 - 3x$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 3$
 $g_p(x) = px + 16$ geeft $g'_p(x) = p$
 $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g'_p(x)$
 $x^3 - 3x = px + 16 \wedge 3x^2 - 3 = p$
 Substitutie van $p = 3x^2 - 3$ in $x^3 - 3x = px + 16$ geeft $x^3 - 3x = (3x^2 - 3)x + 16$
 $x^3 - 3x = 3x^3 - 3x + 16$
 $-2x^3 = 16$
 $x^3 = -8$
 $x = -2$
 $p = 3x^2 - 3$ } $p = 12 - 3 = 9$

Dus voor $p = 9$ raken de grafieken elkaar.

b $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$g_p(x) = px + 4$ geeft $g'_p(x) = p$

$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g'_p(x) = -1$

$\sqrt{x^2 + 1} = px + 4 \wedge \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot p = -1$

$\sqrt{x^2 + 1} = px + 4 \wedge p = \frac{-\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Dit geeft $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{-\sqrt{x^2 + 1}}{x} \cdot x + 4$

$\sqrt{x^2 + 1} = -\sqrt{x^2 + 1} + 4$

$2\sqrt{x^2 + 1} = 4$

$\sqrt{x^2 + 1} = 2$

$x^2 + 1 = 4$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3}$ geeft $p = -\frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}$ geeft $p = -\frac{\sqrt{3+1}}{-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Dus voor $p = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ en voor $p = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ snijden de grafieken elkaar loodrecht.